Carlo Bourlet

PRÉCIS

d'ALGÈBRE

3e B. 2e ET 1ère C.D.

HACHETTE & Cie

2f,50

11. — *Métaux, chimie organique.* Un vol. broché, 5 fr. — Cart. toile...... 5 50

LIB [...] IS

COURS COMPLET de Mathématiques

RÉDIGÉ CONFORMÉMENT AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE 1902
ET A L'ARRÊTÉ MINISTÉRIEL DU 27 JUILLET 1905
Par MM. CARLO BOURLET et HENRI FERVAL
FORMAT IN-16 CARTONNÉ

CARLO BOURLET

PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS

PETIT COURS D'ARITHMÉTIQUE, conten. 3276 exemp. et probl. Cl. Prépar., de 8e et de 7e. Un vol. in-16, c. toile .... 2 fr.
On vend séparément :
Cl. prépar. Nouv. éd. ref. 1 vol. 0 fr. 75
Classes élémentaires. 1 vol.. 1 fr. 50
CORRIGÉ DES EXERCICES ET PROBLÈMES DU PETIT COURS D'ARITHMÉTIQUE, par M. COLIBŒUF. 1 v. 3 fr. 50

COURS ABRÉGÉ D'ARITHMÉTIQUE, cont. 1976 exerc. et probl. 1er CYCLE (6e et 5e A et B, 3e A et 4e B). Un vol .... 2 fr. 50

CORRIGÉ DES EXERCICES ET PROBLÈMES DU COURS ABRÉGÉ D'ARITHMÉTIQUE av. la collab. de M. HULOT. Un vol................ 3 fr. 50

COURS COMPLET D'ARITHMÉTIQUE, 2e CYCLE (classes supér.) avec de nombreux exercices et problèmes. Un vol................ » »

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE : géométrie plane et géométrie dans l'espace. 1er et 2e CYCLES, édit. spéciale à l'usage de la division A. 1 vol. 2 fr. 50
COURS ABRÉGÉ DE GÉOMÉTRIE contenant de nombreux exercices théoriques et des applications au dessin géométrique 1er et 2e CYCLES. A et B. Deux vol. : Géométrie plane, 1 vol. 2 fr. 50. — Géométrie dans l'espace, 1 vol.. » »
CAHIERS D'EXÉCUTION DE DESSINS GEOMÉTRIQUES, par M. BAUDOIN. 1er cahier, 24 pl. 1 fr. 50. — 2e cahier, 35 pl. 2 fr. — 3e cahier » ». — 4e CAHIER.. » »

ELEMENTS D'ALGÈBRE, contenant 631 exercices et problèmes. 1er et 2e CYCLES (3e A, 2e et 1re A et B). Un vol......... 2 fr.
CORRIGÉ DES 631 EXERCICES ET PROBLÈMES DES ELÉMENTS D'ALGÈBRE. Un vol........... 3 fr.

PRÉCIS D'ALGEBRE contenant 557 exercices et problèmes 2e CYCLE (3e B, 2e et 1re C et D). Nouvelle édit. Un vol. 2 fr. 50.
CORRIGÉ DES 557 EXERCICES ET PROBLÈMES DU PRÉCIS D'ALGÈBRE. Un vol .... 3 fr. 50

HENRI FERVAL

PROVISEUR AU LYCÉE DE BREST

COURS D'ALGÈBRE, contenant de nombreux exercices et problèmes (Cl. de Mathématiques). Un vol.................... » »

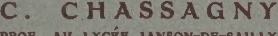
ÉLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE, 2e CYCLE (2e et 1re C D et Mathém. A B) av. 556 exercices et problèmes. Un vol. 2 fr. 50

CORRIGÉ DES EXERC. ET PROBL. DES ÉLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE. Un vol. » »

3-1908-25000

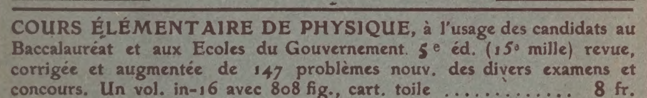
Physique et Chimie

LES OUVRAGES CI-DESSOUS ONT ÉTÉ RÉDIGÉS, REVUS OU REFONDUS CONFORMÉMENT AUX PROGRAMMES OFFICIELS DE 1902 ET A L'ARRÊTÉ MINISTÉRIEL DU 27 JUILLET 1905



C. CHASSAGNY

PROF. AU LYCÉE JANSON-DE-SAILLY



COURS ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, à l'usage des candidats au Baccalauréat et aux Ecoles du Gouvernement. 5e éd. (15e mille) revue, corrigée et augmentée de 147 problèmes nouv. des divers examens et concours. Un vol. in-16 avec 808 fig., cart. toile .... 8 fr.

PREMIERS ÉLÉMENTS DE PHYSIQUE, Cl. de 4e et de 3e B. Un vol. in-16 avec figures, cartonnage toile .... 4 fr.

On vend séparément :

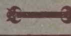
1er *fasc.* Cl. de 4e B. 1 v. cart. toile. 2 fr.
2e *fasc.* Cl. de 3e B. 1 v. cart. toile. 2 fr.

PRÉCIS DE PHYSIQUE, 2e CYCLE. Enseig. sec., cl. de 2e et 1re ABCD et Philosophie. Trois vol. in-16, avec fig., cartonnés toile.

Classe de 2e ABCD. 1 v...... 3 fr.
Classe de 1re ABCD. 1 v...... 4 fr.
Classe de Philosophie. 1 v...... 4 fr.

MANUEL THÉORIQUE ET PRATIQUE D'ÉLECTRICITÉ. 4 fr.

GANOT-MANEUVRIER



TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE de A. GANOT, 23e éd., entièr. refond., p. M. MANEUVRIER, doct. ès-sc., agr. des sc. ph. et nat. Un vol. in-16, nombr. fig., 1 planche en coul., cart. toile. 8 fr. 50

PETIT COURS DE PHYSIQUE PUREMENT EXPÉRIMENTAL et sans mathém. (cand. au Baccal.), 11e édit., entièr. ref. par M. MANEUVRIER. Un vol. in-16, av. fig., cart. toile. 6 fr. 50

JOLY & LESPIEAU

NOUVEAU PRÉCIS DE CHIMIE, CL. DE LETTRES (3e et 4e B ; 2e et 1re C D, Philos. A B et cand. Bac. Latin-Sciences, Scienc.-Lang. viv., Philos. Un vol. in-16, av. fig., cart. toile...................... 4 fr.

On vend séparément :

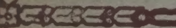
1er fasc. *Généralités Métalloïdes.* — (4e B et 2e C D). Un vol. in-16, cart. toile. 2 fr.
2e fasc. *Métaux, Chimie organique.* — (3e B et 1re C D) ; Baccal. 1re part., Latin-Sciences. — Sciences-Langues viv. Un vol........................ 2 fr.

NOUVEAU PRÉCIS DE CHIMIE. MATHÉMATIQUES (Baccalauréat, Mathématiques, Ecoles Navale et Saint-Cyr). Un vol. in-16 avec figures, cart. toile.. 4 fr.

MANIPULATIONS DE CHIMIE, par M. BLOUET (1re et 2e C D). 2 vol. in-16, cart. chaque volume.......................... 2 fr.

COURS ÉLÉMENTAIRE DE CHIMIE. Deux vol. in-16 :

I. — *Chimie générale métalloïdes* (Mathém. spéc. Ecoles Polytechnique, Normale et Centrale). Un vol. broché, 5 fr. — Cart. toile.................. 5 50
II. — *Métaux, chimie organique.* Un vol. broché, 5 fr. — Cart. toile...... 5 50



PRÉCIS
D'ALGÈBRE

A LA MÊME LIBRAIRIE

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES

A L'USAGE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE ET DES DIVERS ENSEIGNEMENTS
par MM. Carlo BOURLET et Henri FERVAL

ARITHMÉTIQUE

Petit Cours d'Arithmétique (*Classes préparatoires et élémentaires*), avec 3262 exercices et problèmes, par M. C. Bourlet. Un vol. in-16, cart. 2 fr.
1re Partie. Classes préparatoires, 3e édit. revue. Un vol. cart. 75 cent.
2e Partie. Classes élémentaires, 2e édit. revue. Un vol. cart. 1 fr. 5·
Corrigé des Exercices et Problèmes, par M. Coliboeuf. Un vol. in-16, cart. toile . . . . 3 fr. 50

Cours abrégé d'Arithmétique, 1er Cycle, avec 1976 exercices et problèmes, par M. C. Bourlet. 6e édition revue et augmentée. Un vol. in-16, cart. toile. . . . . 2 fr. 50
Corrigé des 1976 Exercices et Problèmes, par M. J. Hulot. Un vol., cart. toile . . . . 3 fr. 50

Cours complet d'Arithmétique, 2e Cycle, par M. C. Bourlet. Un vol. in-16, cart. toile. . . . . » »
Corrigé des Exercices et Problèmes. Un vol. in-16, cart. toile. . . . » »

GÉOMÉTRIE

Cours abrégé de Géométrie, publié avec de nombreux exercices théoriques et pratiques et des applications au dessin géométrique, 1er et 2e Cycles, par M. C. Bourlet, avec la collaboration de M. Paul Baudoin, professeur de mathématiques et de dessin géométrique au lycée Voltaire. Deux volumes in-16, cartonnage toile :
Géométrie plane. Un vol. . . . . 2 fr. 50
Géométrie dans l'espace. Un vol. . . . . » »
Corrigé des Exercices théoriques. Un vol . . . . » »

Cahiers d'exécution de dessin géométrique, correspondant aux exercices graphiques du *Cours abrégé de géométrie*, par M. P. Baudoin. Quatre cahiers in-4e oblong :
Premier cahier, 24 planches avec texte. . . . . » »
Deuxième cahier, 36 planches avec texte. . . . . » »

Éléments de Géométrie (*Géométrie plane et Géométrie dans l'espace réunies*), 1er et 2e Cycles, édition spéciale à l'usage de la Division A. Un vol.

Cours complet de Géométrie, 2e Cycle, par M. C. Bourlet. Un vol. » »

ALGÈBRE

Éléments d'Algèbre, 1er et 2e Cycles (*Classes de Troisième A, de Seconde et de Première A et B*), avec 631 exercices et problèmes, par M. C. Bourlet, 4e édition conforme à l'arrêté ministériel du 27 juillet 1905. Un volume in-16, cart. toile . . . . 2 fr. »
Corrigé des Exercices et Problèmes, par M. Hulot. Un vol. in-16, cart. toile . . . . 3 fr. »

Précis d'Algèbre, 1er et 2e Cycles (*Classes de Troisième B, de Seconde et de Première C et D*), avec 573 exercices et problèmes, par M. C. Bourlet, 4e édition conforme à l'arrêté ministériel du 27 juillet 1905. Un vol. in-16, cart. . . . . 2 fr. 50
Corrigé des Exercices et Problèmes, par M. Hulot. Un vol. in-16, cart. toile . . . . 3 fr. 50

Cours d'Algèbre, 2e Cycle (*Classes supérieures*), publié avec des exercices et problèmes, par M. H. Ferval, proviseur du lycée de Brest. Un vol. in-16, cart. . . . . » »

TRIGONOMÉTRIE

Éléments de Trigonométrie, 2e Cycle (*Classes de Seconde et de Première C, D et de Mathématiques A, B*) avec 556 exercices et problèmes, par M. H. Ferval, 3e édition revue et corrigée conformément aux programmes du 27 juillet 1905. Un vol. in-16, cart. toile. . . . . 2 fr. 50
Corrigé des Exercices et Problèmes. Un vol. in-16. . . . . »

59615. — Imprimerie Lahure, 9, rue de Fleurus, à Paris.

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES
A L'USAGE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE ET DES DIVERS ENSEIGNEMENTS
Par MM. Carlo BOURLET et Henri FERVAL

Carlo BOURLET
Docteur ès sciences
Professeur honoraire de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers

PRÉCIS D'ALGÈBRE

Contenant 573 Exercices et Problèmes

RÉDIGÉ CONFORMÉMENT AUX PROGRAMMES DU 31 MAI 1902
ET DU 27 JUILLET 1905

Classes de Troisième B
Seconde et Première C et D

QUATRIÈME ÉDITION REVUE ET COMPLÉTÉE

PARIS
LIBRAIRIE HACHETTE ET Cie
79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

—

1907

AVERTISSEMENT

DE LA TROISIÈME ÉDITION

Cette nouvelle édition de notre « Précis d'Algèbre » a été soigneusement revue et augmentée de façon à être exactement conforme aux nouveaux programmes du 27 *juillet* 1905 *pour les Classes de Troisième B, Seconde et Première C et D.*

A cet effet, nous avons, en dehors de quelques additions et corrections de moindre importance, divisé notre ancien Chapitre VII en deux nouveaux chapitres, l'un (nouveau Chap. VII) réservé à l'étude des variations de fonctions sans l'emploi des dérivées, l'autre (Chap. VIII) consacré à l'étude des dérivées et de leurs applications.

Les § 3 *du Chapitre VII (variation des fonctions de lignes trigonométriques),* § 3 *et* 4 *du Chapitre VIII (théorèmes généraux sur les dérivées et applications au mouvement rectiligne), destinés aux élèves de Première C et D, sont entièrement nouveaux.*

Nous nous sommes efforcé de les rédiger dans le même esprit que le reste de l'ouvrage et nous avons pro-

fité de cette révision pour augmenter encore le nombre des exercices proposés.

Nous rappellerons en terminant que ce Précis comprend, sous la même forme, toutes les matières de nos « Éléments d'Algèbre » ; ceci dans le but de faciliter aux professeurs l'enseignement à deux divisions réunies.

On pourra donc, avec ces deux volumes, réunir les élèves des deux Troisième A et B pour leur enseigner les parties communes de leurs programmes d'Algèbre, tout en leur mettant entre les mains deux volumes distincts, mais concordants sur ces parties communes.

Les exercices proposés seuls diffèrent dans les deux volumes.

CARLO BOURLET.

EXTRAIT DES PROGRAMMES OFFICIELS

DU 27 JUILLET 1905

ALGÈBRE

CLASSE DE TROISIÈME B

Nombres positifs et négatifs. Opérations. Applications concrètes.

Monômes, polynômes.

Addition, soustraction, multiplication des monômes et des polynômes. Identité : $x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots\ldots + a^{m-1})$.

Division des monômes.

Équations numériques du premier degré à une ou à deux inconnues.

Variation et signe de l'expression $ax + b$; représentation graphique.

Équations du second degré. Relations entre les coefficients et les racines.

Variations du trinôme du second degré, de la fonction $\dfrac{ax + b}{a'x + b'}$; représentation graphique.

Usage des tables de logarithmes et d'antilogarithmes à quatre décimales. Intérêts composés.

CLASSE DE SECONDE C D

Opérations sur les nombres positifs ou négatifs.

Monômes; polynômes; termes semblables.

Opérations. — Addition, soustraction, multiplication des monômes et des polynômes :

Identité : $x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots\ldots + a^{m-1})$.

Division des monômes.

Résolution des équations du premier degré à une inconnue. Inégalité du premier degré. Résolution et discussion de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Problèmes; mise en équation. Discussion des résultats.

Variation de l'expression $ax + b$; représentation graphique.

Équation du second degré à une inconnue (on ne fera pas la théorie des imaginaires). Relations entre les coefficients et les racines.

Existence et signe des racines. Étude du trinôme du second degré.

Inégalité du second degré. Problèmes du second degré. Variation du trinôme du second degré; représentation graphique.

Variation de l'expression $\frac{ax+b}{a'x+b'}$; représentation graphique.

Notion de la dérivée; signification géométrique de la dérivée. Le signe de la dérivée indique le sens de la variation; applications à des exemples numériques très simples et en particulier aux fonctions étudiées précédemment.

Progressions arithmétiques et progressions géométriques. Logarithmes.

Usage des tables de logarithmes à quatre ou cinq décimales.

Intérêts composés.

Nota. — Pour ce qui est des logarithmes, on se proposera essentiellement de familiariser les élèves avec l'usage des tables.

Les professeurs pourront donner des indications très sommaires sur la théorie déduite soit de l'étude des progressions, soit de l'étude des exposants.

CLASSE DE PREMIÈRE C D

Équation et trinôme du second degré. Cas où la variable est une ligne trigonométrique.

Calcul des dérivées de fonctions simples. Étude des variations et de la représentation graphique.

Étude d'un mouvement rectiligne au moyen de la théorie des dérivées. Vitesse et accélération. Mouvement uniformément varié.

[Les professeurs devront appliquer les théories de l'algèbre à de nombreux exemples empruntés soit à l'algèbre, soit à la trigonométrie, soit à la géométrie.]

PRÉCIS D'ALGÈBRE

CHAPITRE PREMIER

NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS

§ 1. — Généralités.

1. — **But de l'algèbre.** — L'algèbre a pour objet de généraliser les calculs de l'arithmétique ; de donner des règles simples pour la résolution des *problèmes* numériques et de fournir des *formules* représentant, sous une forme condensée, le résultat d'un type de problèmes.

Pour atteindre ce but, elle emploie les *lettres* et les *signes*.

2. — **Emploi des lettres.** — Les lettres servent à représenter les nombres.

Au lieu de raisonner, comme en arithmétique, sur des nombres : 4, 5, $\frac{2}{3}$, etc., on raisonne sur des lettres : a, b, c,... x, y..... censées représenter des nombres connus ou à connaître. Les résultats auxquels on parvient ainsi offrent une grande généralité, car, comme on ne précise pas sur quels nombres on opère, ils sont vrais pour tous les nombres.

3. — **Signes.** — On fait usage, en algèbre, des signes que l'on emploie en arithmétique et de quelques autres que nous aurons occasion de définir au cours de l'ouvrage.

Nous rappelons brièvement les significations des signes de l'arithmétique.

4. — Signes opératoires.

+ est le signe de l'addition ; il se prononce *plus*.

− est le signe de la soustraction ; il se prononce *moins*.

× est le signe de la multiplication ; il se prononce *multiplié par*. Lorsqu'on représente les nombres par des lettres, on emploie souvent un *point*, ou même on se contente d'écrire les deux lettres qui représentent les nombres à multiplier l'une à la suite de l'autre sans intercaler aucun signe.

Ainsi, $a \times b$, $a \cdot b$ et ab représentent également le *produit* de a par b.

: est le signe de la division ; il se prononce *divisé par*. En algèbre, on emploie de préférence le *trait de fraction* pour indiquer la division.

Ainsi, $\frac{a}{b}$ et $a : b$ indiquent, l'un et l'autre, le *quotient* de a par b, mais on emploie plutôt la première notation.

On appelle *puissance* le produit de plusieurs facteurs égaux. L'*exposant* de la puissance est le nombre de ces facteurs. Pour écrire une puissance, on emploie une écriture abrégée, qui consiste à écrire une seule fois la valeur commune des facteurs égaux et à placer en haut à droite l'exposant.

Ainsi, au lieu d'écrire $4 \times 4 \times 4$ on écrit 4^3. Au lieu de $aaaa$, on écrit a^4. De même, a^m représente le produit de m facteurs égaux à a ; c'est ce qu'on appelle la *puissance* $m^{\text{ième}}$ de a.

$\sqrt{\ }$ est le signe de l'extraction de la racine carrée.

$\sqrt[3]{\ }$ est le signe d'extraction de la racine cubique.

Plus généralement, $\sqrt[m]{\ }$ est le signe de l'extraction de la racine $m^{\text{ième}}$; c'est-à-dire que $\sqrt[m]{a}$ représente un nombre dont la puissance $m^{\text{ième}}$ est égale à a.

Par exemple, $\sqrt{4}$ représente la racine carrée de 4 ; $\sqrt[4]{81}$ représente

la racine quatrième de 81, c'est-à-dire le nombre dont la puissance quatrième est égale à 81 (ici c'est 3).

5. — Signes de comparaison :

$=$ est le signe de l'égalité ; il se prononce ***égale.***

$\neq$ indique la *non-égalité ;* il se prononce ***différent de.***

$>$ s'énonce ***plus grand que.*** } Signes de l'inégalité.
$<$ s'énonce ***plus petit que.***

Ainsi, on a :

$$4+3=7,\quad 4+3\neq 6,\quad 3>2,\quad 2<3.$$

et on dit : $4+3$ égale 7, $4+3$ différent de 6, 3 plus grand que 2, 2 plus petit que 3.

On emploie aussi quelquefois les signes de l'égalité et de l'inégalité combinés.

$\geqq$ indique ***supérieur ou égal à.***

$\leqq$ signifie ***inférieur ou égal à.***

Par exemple, $a \geqq b$ signifie : a supérieur ou égal à b.

6. — Parenthèses. — Lorsqu'on place une quantité entre ***parenthèses*** ( ), entre ***crochets*** [ ], ou entre ***accolades*** { }, on indique par là que cette quantité forme un *tout inséparable.*

Lorsqu'on met une opération entre parenthèses, on indique par là que l'opération est considérée comme *effectuée.*

Ainsi, $4+3-5$ indique des *opérations à effectuer* sur les nombres 4, 3, 5 ; au contraire, $(4+3-5)$ représente *le résultat de ces opérations supposées effectuées.*

Les deux expressions

$$4+3\times 5+2$$

et

$$(4+3)\times(5+2)$$

représentent deux suites d'opérations fort différentes. La première indique qu'à 4 on doit ajouter le produit de 3 par 5, puis au résultat le nombre 2. Le résultat est donc 21.

La seconde indique qu'on doit ajouter d'une part 4 et 3 et d'autre part 5 et 2, puis multiplier les deux sommes effectuées. Le résultat est donc 49.

De même, $(a+b+c)\,(d+f+g)$

signifie qu'il faut multiplier la somme $a + b + c$ *effectuée*, par la somme $d + f + g$ également *effectuée*.

7. — **Problèmes.** — ***Résoudre un problème****, c'est calculer certaines quantités qu'on appelle* ***les inconnues****, connaissant d'autres quantités appelées* ***données****, et sachant qu'il existe entre les données et les inconnues certaines relations.*

Énoncer *le problème, c'est exprimer, en langage ordinaire, les relations qui existent entre les données et les inconnues.*

Les valeurs des inconnues sont ce qu'on appelle les ***solutions****.*

8. — **Avantages de l'usage des lettres.** — Pour bien faire comprendre comment l'usage des lettres permet de généraliser certaines questions, nous traiterons un exemple simple.

Supposons qu'il s'agisse de résoudre le problème suivant :

Un train marche à la vitesse de 45 kilomètres à l'heure. Quelle distance aura-t-il parcouru en 2 heures et demie?

La règle de trois d'arithmétique nous donne immédiatement la solution. Le train, faisant 45 kilomètres en une heure, fera $45 \times 2{,}5$, soit 112,5 kilomètres en 2 heures et demie.

Il est clair qu'on pourra, en changeant simplement les valeurs numériques des deux données, à savoir la vitesse du train et le temps de marche, imaginer un grand nombre de problèmes du même type. En arithmétique, il faudra, pour chaque cas, recommencer le problème tout entier.

Au contraire, en algèbre, grâce à l'emploi des lettres, on pourra faire le problème une fois pour toutes.

Désignons, en effet, par v la vitesse du train et par t le temps pendant lequel il marche

Puisqu'en une heure, le train fait v kilomètres, en t heures, il fera $v \times t$ ou vt kilomètres. La distance parcourue est vt et, si on la désigne par x, on a :

(1) $$x = vt.$$

Si, maintenant, on veut résoudre un problème quelconque du type précédent, il suffit, dans cette égalité, de remplacer les lettres v et t par les nombres qu'elles représentent.

Ainsi, si le train marche 3 heures, à 50 kilomètres à l'heure, la distance parcourue est :

$$x = 50 \times 3 = 150 \textit{ kilomètres.}$$

en remplaçant, dans l'égalité (1), v par 50 et t par 3.

9. — Formules. — Une égalité telle que l'égalité (1), qui donne la valeur d'une inconnue au moyen de données représentées par des lettres, est ce qu'on appelle une *formule.*

Une formule est donc une égalité qui donne, sous forme abrégée, la suite des calculs qu'il faut effectuer sur les données d'un problème pour obtenir la valeur d'une inconnue. Elle contient la solution de tous les problèmes d'un même type.

Ainsi, la formule (1) donne la solution de tout problème dans lequel il s'agit de calculer la distance parcourue par un mobile, connaissant sa vitesse et le temps du parcours.

Nous avons déjà fait usage de *formules* en arithmétique. Ainsi nous avions déjà employé[1] la formule $e = vt$. De même, nous avons donné[2] la formule de l'intérêt simple :

$$I = a \cdot \frac{t}{100} \cdot N.$$

où I désigne l'intérêt du capital a, placé au taux t pendant N années.

§ 2. — Définitions.

10. — Grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens différents. — On rencontre, à chaque instant, des exemples de grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens différents ou d'avoir deux acceptions opposées.

1. Voir dans notre *Cours abrégé d'arithmétique*, page 274, n° 658.
2. *Cours abrégé d'arithmétique* : pages 347 et 348, n° 816.

En voici des exemples :

11. — **Doit et avoir.** — Le bilan d'un certain nombre d'opérations effectuées par un banquier ou un commerçant est une certaine somme d'argent. Cette somme est *soit une recette, soit un débours.*

12. — **Température.** — Le thermomètre est un instrument qui sert à mesurer la température. La température est susceptible d'être comptée dans deux sens différents. En effet, dans le thermomètre centigrade, une colonne de liquide (mercure ou alcool), se meut dans un tube étroit de verre. Ce tube porte une graduation. Le chiffre o est inscrit sur cette graduation au point où s'arrête la colonne lorsqu'on plonge l'instrument dans de la glace fondante. Si on met le thermomètre en contact avec un corps plus chaud que la glace fondante, la colonne s'arrête en un point de la graduation situé au-dessus du zéro. Au contraire, si le corps est plus froid que la glace fondante, la colonne descend au-dessous du zéro. La température d'un corps peut donc être mesurée par un certain nombre de degrés centigrades, *soit au-dessus, soit au-dessous de zéro.*

13. — **Distances.** — Considérons encore un mobile qui se meut sur une ligne droite. Supposons qu'il parte d'un point A de la droite et qu'il décrive un certain chemin. Il peut, en partant de A, marcher dans deux sens différents, aller vers la gauche ou vers la droite.

Le chemin parcouru peut donc être compté dans deux sens opposés.

14. — **Insuffisance des nombres arithmétiques pour mesurer ces grandeurs.** — Comme nous l'avons dit plus haut, l'un des buts principaux de l'algèbre est de construire des formules (n° 9) qui fournissent les solutions de tous les problèmes d'un même type.

Lorsque l'inconnue dont la formule doit donner la va-

leur est une quantité susceptible d'être comptée dans deux sens différents, il faut, non seulement connaître sa valeur numérique, mais encore le sens dans lequel elle est comptée. Si l'on mesurait ces grandeurs avec les nombres de l'arithmétique, une formule ne pourrait donner que la valeur numérique de l'inconnue et l'on ne connaîtrait pas son sens.

De là découle déjà la nécessité de créer de nouveaux nombres indiquant non seulement les valeurs numériques des quantités qu'ils mesurent, mais aussi leurs sens.

15. — Mais il y a plus. Une formule, pour être vraiment générale, doit pouvoir servir dans tous les cas. Or, il est facile de voir que les nombres arithmétiques ne permettent pas toujours de le faire.

Reprenons l'exemple du n° **11.**

Supposons qu'un commerçant fasse deux opérations successives.

1° S'il fait *deux recettes*, l'une de A francs, l'autre de B francs, le bilan des deux opérations sera une *recette* de $A + B$ francs.

2° S'il fait *une recette* de A francs et *un débours* de B francs et si la recette est plus forte que le débours, le bilan sera une *recette* de $A - B$ francs. Si au contraire la recette est plus petite que le débours, le bilan sera un *débours* de $B - A$ francs.

3° Enfin, s'il fait *deux débours* de A et B francs, le bilan final sera un *débours* de $A + B$ francs.

On voit donc que si on appelle X le bilan on aura, suivant les cas,

$$X = A + B,$$
$$X = A - B,$$
$$X = B - A.$$

Non seulement la formule n'indique pas si le bilan est un débours ou une recette, mais encore ce n'est pas toujours la même formule. Nous verrons plus loin (n° **28**) que précisément, grâce à l'introduction des nombres algébriques que nous allons définir, on pourra donner une formule *unique*, bonne dans tous les cas, qui, à elle seule, indiquera le sens du résultat.

16. — Ce qui précède nous montre donc que, pour pouvoir obtenir des formules générales, il faut ajouter aux nombres qui mesurent les grandeurs précitées quelque chose, un signe par exemple, qui soit propre à indiquer le sens dans lequel on les compte.

Pour des raisons que nous ne pouvons donner ici, on a été conduit à choisir comme signes distinctifs les signes + et — de l'addition et de la soustraction.

Les applications que nous ferons dans la suite suffiront d'ailleurs à justifier ce choix.

17. — Nombres positifs et négatifs. — *On appelle* **nombre positif** *un nombre arithmétique autre que zéro précédé du signe +.*

On appelle **nombre négatif** *un nombre arithmétique autre que zéro précédé du signe —.*

L'ensemble des nombres positifs et négatifs, auxquels on adjoint le nombre zéro *qui n'a aucun signe*, forme ce qu'on appelle les **nombres algébriques**.

Ainsi, + 4, qui se lit : *plus quatre*, est un nombre positif.
— 25, qui se lit : *moins vingt-cinq*, est un nombre négatif.

Ces nombres servent à mesurer les grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens différents.

Ainsi, si le bilan d'un commerçant est une recette de 215 francs, il a 215 francs *de plus* en caisse. Le bilan est + 215 francs.

Si, au contraire ce bilan est un débours de 128 francs, le commerçant a 128 francs *de moins* en caisse. Le bilan est — 128 francs.

18. — Nous représenterons les nombres algébriques par des lettres, mais dans la suite de ce chapitre, pour éviter toute confusion, nous emploierons toujours les petites lettres pour désigner les nombres algébriques et les grandes lettres pour désigner des nombres arithmétiques.

19. — Il faut remarquer avec soin que les signes distinctifs + et — des nombres positifs et négatifs n'ont, jusqu'à nouvel ordre du moins, aucune signification opératoire. Ils font corps avec eux. Lorsque ce sera nécessaire, pour empêcher toute méprise, nous enfermerons le nombre et son signe dans des parenthèses pour bien indiquer que les deux forment un tout inséparable.

20. — Valeur absolue. — *On appelle* **valeur absolue** *d'un nombre algébrique, le nombre arithmétique obtenu en supprimant son signe.*

Pour indiquer la valeur absolue d'un nombre, on le place entre deux barres verticales. Ainsi, $|a|$ signifie *valeur absolue de a*.

$$|+4| = 4, \qquad |-3| = 3, \qquad |0| = 0.$$

21. — **Convention**. — *Tout nombre positif est égal à sa valeur absolue.*

$$+5 = 5, \qquad +\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Cette convention, comme nous le verrons dans la suite, n'introduira aucune contradiction. Grâce à elle, les nombres positifs sont identiques aux nombres arithmétiques. Les seuls nombres nouveaux sont donc les nombres négatifs.

22. — **Égalité**. — *Deux nombres algébriques sont dits* **égaux** *lorsqu'ils ont* **même valeur absolue et même signe.** *Dans le cas contraire, ils sont dits* **inégaux.**

On emploie les signes habituels = (égal), et ≠ (inégal).

23. — *Deux nombres algébriques sont dits* **opposés** *lorsqu'ils ont* **même valeur absolue** *et* **des signes contraires.**

Ainsi : $+3$ et -3, $+\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

§ 3. — Addition et Soustraction.

24. — **Somme de deux nombres**. — *Étant donnés deux nombres algébriques, on appelle* **somme** *de ces deux nombres le nombre obtenu de la façon suivante :*

1° Si les deux nombres sont de même signe on fait la somme arithmétique des valeurs absolues et on lui donne le signe commun des deux nombres.

2° Si les deux nombres sont de signes contraires, on fait la différence arithmétique des valeurs absolues et on lui donne le signe de celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue. Dans le cas particulier où les deux nombres sont opposés, leur somme est 0.

3° Si l'un des deux nombres est 0, la somme est égale à l'autre.

Nous emploierons pour désigner la somme le signe

ordinaire +, mais pour ne pas faire de confusions, nous aurons soin de placer chaque nombre et son signe entre parenthèses.

Ainsi :

$$(+3)+(+2)=+5,$$
$$(+3)+(-2)=+1,$$
$$(-3)+(+2)=-1,$$
$$(-3)+(-2)=-5,$$
$$(-3)+\quad 0\quad =-3.$$

25. — Somme de plusieurs nombres. — Étant donnés plusieurs nombres, pour faire leur **somme :**

1° Si tous ces nombres sont de même signe, on fait la somme arithmétique des valeurs absolues et on lui donne le signe commun de tous ces nombres.

2° Si tous les nombres ne sont pas de même signe, on fait, séparément, la somme de tous les nombres positifs et celle de tous les nombres négatifs, et on ajoute, d'après la règle du n° 24, les deux nombres, l'un positif, l'autre négatif, ainsi obtenus.

Par exemple,

$$(+4)+(+5)+(+2)=+11,$$
$$(-4)+(-5)+(-2)=-11,$$
$$(+4)+(-5)+(-2)+(+3)=(+7)+(-7)=0,$$
$$(+15)+(-10)+(+2)+(-3)+(-8)$$
$$=(+17)+(-21)=-4.$$

26. — Simplification d'écriture. — Lorsque les nombres qu'il s'agit d'ajouter ne sont pas représentés par des lettres, on se contente, pour indiquer leur somme de les écrire *à la suite les uns des autres.*

Ainsi, au lieu d'écrire :

$$(-4)+(-5)+(-2)$$

on écrit, plus simplement,

$$-4-5-2$$

de même

$$(+4)+(-5)+(-2)+(+3)=+4-5-2+3,$$
$$(+15)+(-10)+(+2)+(-3)+(-8)$$
$$=+15-10+2-3-8.$$

Lorsque le premier nombre écrit est positif, on peut même suppri-

mer le signe + qui le précède puisque ce nombre est égal à sa valeur absolue.

On écrira donc ainsi les sommes précédentes :

$$4 - 5 - 2 + 3 \quad \text{et} \quad 15 - 10 + 2 - 3 - 8.$$

27. — **Remarque importante.** — De la simplification d'écriture qui précède il résulte qu'une même expression peut avoir deux sens : l'un arithmétique, l'autre algébrique. Il est facile de voir que ceci ne conduit à aucune contradiction.

Ainsi l'expression

$$15 - 10 + 2 - 3$$

peut être considérée à volonté comme définie en arithmétique ou en algèbre.

Au point de vue arithmétique, elle indique que de 15 on retranche 10, qu'au résultat on ajoute 2 et que de ce dernier on retranche 3.

Au point de vue algébrique, elle indique la somme des quatre nombres $+15, -10, +2, -3$.

Quelle que soit la manière d'envisager cette expression, le résultat est toujours le même. Car, dans les deux cas, elle est égale à l'excès de la somme des valeurs absolues des nombres positifs sur la somme des valeurs absolues des nombres négatifs. C'est $17 - 13 = 4$.

28. — **Recettes et dépenses.** — Supposons qu'une personne ait fait un certain nombre de recettes et un certain nombre de dépenses. Il est clair que pour avoir le résultat final des opérations il suffira d'abord de faire la somme de toutes les recettes : ce sera la recette totale; ensuite la somme des dépenses : ce qui sera la dépense totale. On fera ensuite la différence des deux sommes. Si la recette totale est plus grande que la dépense totale, cette différence sera une *recette*; si au contraire c'est la dépense qui est la plus grande, la différence sera une *dépense*.

Or, si on convient d'affecter toutes les recettes du signe

+ et les dépenses du signe —, les opérations précédentes fournissent précisément la *somme* des nombres algébriques en question. Le signe du résultat indique sa nature.

Donc, *pour obtenir le bilan d'un certain nombre de recettes et de dépenses, il suffit d'affecter les recettes du signe + et les dépenses du signe — et de faire la somme de ces nombres algébriques.*

PROBLÈME I. — *Un commerçant a, successivement, vendu une pièce de drap pour* 125 *francs et une autre pour* 242 *francs; acheté une pièce pour* 175 *francs, qu'il a revendue pour* 218 *francs; puis acheté une pièce de drap de* 98 *francs.*

Le bilan du commerçant est donc :

$$+125+242-175+218-98$$
$$=+585-273=+312,$$

c'est-à-dire que le marchand a *encaissé* 312 francs.

PROBLÈME II. — *Supposons qu'une personne ait :* 1° *payé* $25^{fr},35$; 2° *reçu* $17^{fr},40$; 3° *payé* 115 *francs*; 4° *reçu* $93^{fr},25$; 5° *payé* $8^{fr},70$.

Le bilan des opérations est :

$$-25,35+17,40-115+93,25-8,70$$
$$=-149,05+110,65=-38,40.$$

Le résultat est *négatif*. La personne a donc finalement *déboursé* $38^{fr},40$.

Nous voyons bien ici, comme nous l'avions annoncé au n° **15**, qu'au lieu d'être forcé de raisonner à part dans chaque cas et d'avoir, chaque fois, une formule nouvelle, nous n'avons plus qu'une seule formule, *une seule règle*, bonne pour *tous* les cas.

29. — **Distances**. — Un voyageur se déplace sur la route de Paris à Dijon. Chaque fois qu'il marche de Paris vers Dijon, sa distance à Paris *augmente*; chaque fois qu'il va en sens inverse, de Dijon vers Paris, sa distance à Paris *diminue*.

On est donc conduit à considérer toutes les distances

parcourues dans le premier sens comme *positives*, puisqu'il faut les *ajouter* pour obtenir la distance à laquelle le voyageur se trouve éloigné de Paris; et à considérer les distances parcourues en sens contraire comme *négatives*, puisqu'il faut les *retrancher*.

30. — PROBLÈME. — *Un voyageur part de Paris et va à Dijon, qui est à* 315 *kilomètres de Paris. Il revient de Dijon à Joigny qui est à* 169 *kilomètres de Dijon. Il retourne vers Dijon et s'arrête à Tonnerre après avoir fait* 31 *kilomètres. A quelle distance de Paris se trouve-t-il alors?*

D'après ce qui précède, les distances parcourues dans le sens Paris-Dijon doivent être prises avec le signe (+); celle parcourue dans le sens opposé doit être prise avec le signe (—). La distance cherchée est la somme algébrique des distances partielles. C'est donc :

$$(+315)+(-169)+(+31)=315-169+31$$
$$=177 \text{ kilomètres.}$$

31. — Théorème. — ***Dans une somme de nombres algébriques, on peut intervertir l'ordre des termes.***

Ceci résulte immédiatement de la définition du n° **25**, et de ce que la proposition est vraie en arithmétique, car rien, dans cette définition, n'indique l'ordre dans lequel sont écrits les termes.

Ainsi :

$$4-5+3-2=-5-2+4+3=4-2-5+3.$$

32. — Théorème. — ***Dans une somme de nombres algébriques, on peut remplacer plusieurs termes par leur somme effectuée.***

C'est évident lorsque tous les nombres dont on fait la somme sont de même signe, puisque la proposition est vraie en arithmétique.

On peut *justifier* la proposition en raisonnant sur des recettes et dépenses. Voici comment :

A une *première* personne Paul a payé 83 francs et en a reçu 52 francs; d'une *seconde* personne Paul a reçu d'abord 42 francs, puis 37 francs

et il lui a payé 115 francs; enfin à une *troisième* personne, Paul a payé 29 francs et en a reçu 95 francs.

Le bilan de Paul est :

$$-83+52+42+37-115-29+95.$$

Mais pour établir ce bilan, nous pouvons raisonner autrement et nous pouvons chercher séparément le résultat des opérations de Paul avec chacune des trois personnes.

Première personne : $-83+52=-31$,
Deuxième personne : $+42+37-115=-36$,
Troisième personne : $-29+95=+66$.

On peut donc dire que Paul a payé 31 francs à la première personne, payé 36 francs à la seconde et reçu 66 francs de la troisième. Son bilan est donc aussi $-31-36+66$, et ceci revient à remplacer dans la première somme

$$-83+52,\quad +42+37-115\quad \text{et}\quad -29+95$$

par les sommes *effectuées*.

En employant les *parenthèses* (n° **6**) on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} &-83+52+42+37-115-29+95\\ =\ &(-83+52)+(42+37-115)+(-29+95)\\ =\ &-31-36+66. \end{aligned}$$

33. — Soustraction. — ***Retrancher un nombre*** b ***d'un nombre*** a ***c'est trouver un troisième nombre qui, ajouté à*** b, ***donne une somme égale à*** a.

Ainsi on a : $(-7)+(+8)=+1$.

Donc $+8$ est la *différence* de $+1$ et de -7 puisque en ajoutant $+8$ à -7 on trouve $+1$.

34. — On indique une soustraction par le signe —, comme en arithmétique; mais pour éviter des confusions on place les nombres avec leurs signes entre parenthèses.

Ainsi nous écrivons

$$(+1)-(-7)=+8.$$

35. — Règle. — ***Pour retrancher un nombre on ajoute le nombre opposé.***

Ceci résulte de suite de ce que (N° **24**) la somme de deux nombres opposés est égale à *zéro*.

Ainsi on a : $(+4)-(-5)=(+4)+(+5)$;

car $(+4)+(+5)+(-5)=(+4)+0=+4,$

en remplaçant $(+5)+(-5)$ par la somme effectuée qui est *zéro*.

On a donc : $(+4)-(-5)=+9.$

De même : $(+3)-0=+3+0=+3;$
$(-5)-(+4)=-5-4=-9;$
$(-5)-(-4)=-5+4=-1.$

36. — Somme algébrique. — On appelle *somme algébrique* une suite d'additions ou de soustractions successives.

Ainsi $(+4)+(-5)-(-3)+(-1)-(+7)$

est une *somme algébrique*. Cette expression indique que l'on doit faire la somme de $+4$ et -5; du résultat retrancher -3; au nouveau résultat ajouter -1; enfin de ce dernier résultat retrancher $+7$.

Or, d'après la règle précédente, pour retrancher -3 on ajoute $+3$, et pour retrancher $+7$ on ajoute -7.

On peut donc écrire ceci :

$$+4-5+3-1-7.$$

Ce qui est une *somme ordinaire*.

On peut donc dire que : *toute somme algébrique est identique à une somme ordinaire à condition de remplacer les termes précédés du signe (—) par leurs opposés.*

Les sommes algébriques jouissent donc des mêmes propriétés que les sommes ordinaires.

37. — Conséquence. — Considérons une somme algébrique

$$a+b-c+d-e$$

où a, b, c, d, e désignent des nombres positifs ou négatifs. On la transforme en somme ordinaire en remplaçant $-c$ et $-e$ par les nombres *opposés*. Ceci conduit à la convention suivante :

On désigne le nombre opposé d'un nombre donné en plaçant le signe (—) devant ce nombre.

Ainsi $-a$ désigne le nombre opposé à a.

$$-(-5) = +5, \qquad -(+3) = -3.$$

Avec cette convention, la somme algébrique $a+b-c+d-e$ peut être considérée comme la somme ordinaire de a, b, $-c$, d et $-e$, qui sont appelés les *termes* de la somme.

38. — Théorème. — ***Si dans une somme on remplace tous les termes par des termes opposés, la nouvelle somme est opposée à la première.***

C'est presque évident puisque tous les nombres positifs deviennent négatifs et inversement.

Ainsi, si dans $\quad 5 - 4 + 3 - 2 = +2$

on remplace les termes par des nombres opposés, on obtient

$$-5 + 4 - 3 + 2 = -2.$$

On a de même

$$-(a + b - c + d) = -a - b + c - d,$$

car $-(a + b - c + d)$ indique l'opposé de $(a + b - c + d)$ *effectué* (n° **6**).

39. — Théorème. — ***Pour ajouter ou retrancher une somme algébrique, il suffit d'ajouter ou de retrancher chacune des parties.***

On a, en effet,

$$a - b + (c - d + e) = a - b + c - d + e,$$

puisqu'on peut, dans la somme $a - b + c - d + e$, remplacer $c - d + e$ par la somme effectuée.

D'autre part, pour *retrancher* $c - d + e$, on doit *ajouter* le nombre opposé qui est, d'après le n° **38**, $-c + d - e$.

Donc : $\quad a - b - (c - d + e) = a - b - c + d - e.$

40. — D'après ce qui précède on peut supprimer ou introduire des parenthèses.

On a :

$$a + b + (c - d) + (e - f + g) = a + b + c - d + e - f + g;$$
$$(a - b + c) - (d + f) - (g - h) = a - b + c - d - f - g + h;$$
$$a - b + c - d - f = a - (b - c + d) - f;$$
$$a - b + c - d - f = a - b + c - (d + f);$$
$$a - b + c - d - f = a + c - (b + d + f);$$
$$a - b + c - d - f = (a - b) + (c - d) - f.$$

On voit d'après cela que :

1° *On peut, sans rien changer, introduire ou supprimer dans une somme des parenthèses précédées du signe* $(+)$.

2° *Lorsque dans une somme on introduit ou on supprime une parenthèse précédée du signe* $(-)$, *il faut changer les signes de tous les termes placés dans la parenthèse.*

§ 4. — Multiplication et Division.

41. — Produit de deux nombres. — *On appelle produit de deux nombres algébriques un nombre dont la valeur absolue est égale au produit des valeurs absolues des deux nombres donnés et qui a le signe* $(+)$ *ou* $(-)$ *suivant que les deux nombres sont de même signe ou non.*

Lorsqu'un des deux nombres est 0, le produit est égal à 0.

Il résulte de là que le signe du produit de deux nombres s'obtient par la règle suivante dite *règle des signes*.

Règle

+	*par*	+	*donne*	+
+	»	—	»	—
—	»	+	»	—
—	»	—	»	+

Ainsi : $(+3)\cdot(+4) = +12,$ $(+3)\cdot(-4) = -12,$ $(-3)\cdot(+4) = -12,$ | $(-3)\cdot(-4) = +12,$ $(+3)\cdot 0 = 0,$ $0\cdot(-4) = 0.$

42. — Produit de plusieurs facteurs. — *On appelle* **produit** *de plusieurs nombres le nombre obtenu de la manière suivante :*

1° On fait le produit arithmétique des valeurs absolues.

2° On affecte ce produit du signe $(+)$ *s'il y a un nombre pair ou nul de facteurs négatifs.*

On l'affecte du signe $(-)$ *s'il y a un nombre impair de facteurs négatifs.*

Lorsqu'un des facteurs du produit est 0, le produit est égal à 0.

Ainsi :
$$\left(+3\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+5\right)\left(+\frac{1}{7}\right) = +\frac{15}{14},$$
$$\left(+3\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-5\right)\left(+\frac{1}{7}\right) = +\frac{15}{14}$$

$$\left(-3\right)\left(+\frac{1}{2}\right)\left(+5\right)\left(+\frac{1}{7}\right)=-\frac{15}{14},$$
$$\left(-3\right)\left(+\frac{1}{2}\right)\left(-5\right)\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{15}{14},$$
$$(+3)\cdot 0\cdot(-5)=0,$$
$$0\cdot\left(-4\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

43. — Théorème. — ***Un produit ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs.***

Car, le théorème étant vrai en arithmétique, lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs le produit ne change ni de valeur absolue ni de signe.

44. — Théorème. — ***Dans un produit on peut remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué.***

Ainsi on a :

$$(-4)(+3)(-5)=+60.$$

Donc :

$$(-7)(-4)(+3)(-5)\left(+\frac{1}{3}\right)(-12)$$
$$=(-7)(+60)\left(+\frac{1}{3}\right)(-12).$$

45. — Puissance. — ***On appelle* puissance *$m^{ième}$ d'un nombre le produit de m facteurs égaux à ce nombre*** (n° **4**).

m est ce qu'on appelle l'*exposant *de la puissance.

On indique une puissance en écrivant une seule fois le nombre et en plaçant à droite, en haut, l'exposant.

Ainsi : $a^4 = a\cdot a\cdot a\cdot a$ et se lit *a puissance* 4.

$$(-3)^5=(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)=-243.$$

46. — Il résulte de la définition d'un produit de plusieurs facteurs (n° **42**) que :

1° Toute puissance d'un nombre positif est positive.

2° Une puissance d'un nombre négatif est positive si l'exposant est pair, et négative si l'exposant est impair.

Ainsi : $(-3)^4=+81$ (il y a 4 facteurs négatifs),
$(-3)^3=-27$ (il y a 3 facteurs négatifs).

47. — **Théorème.** — ***Le produit de plusieurs puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre dont l'exposant est la somme des exposants des facteurs.***

En effet $a^4 \cdot a^3 \cdot a^5$ est le produit de 4 facteurs par 3 facteurs, par 5 facteurs tous égaux à a. Donc :

$$a^4 \cdot a^3 \cdot a^5 = \underbrace{aaaa}_{\text{4 fois}} \cdot \underbrace{aaa}_{\text{3 fois}} \cdot \underbrace{aaaaa}_{\text{5 fois}}$$

Il y a en tout $4 + 3 + 5 = 12$ facteurs égaux à a, ce qui est a^{12}. Donc :

$$a^4 \cdot a^3 \cdot a^5 = a^{12} \cdot$$

Ainsi :
$$(+3)^2 \cdot (+3)^4 \cdot (+3)^7 = (+3)^{13};$$
$$(-2)^2 \cdot (-2)^5 = (-2)^7.$$

Un nombre seul peut être considéré comme ayant l'exposant 1.

On peut écrire $a^1 = a$.

Par suite
$$a^3 \cdot a^5 \cdot a = a^9,$$
car
$$3 + 5 + 1 = 9.$$

48. — **Théorème.** — ***Pour multiplier une somme algébrique par un nombre on fait la somme des produits obtenus en multipliant successivement chaque terme par ce nombre.***

Nous nous contenterons de vérifier ce théorème sur des exemples ; mais pour bien l'appliquer il faut se rappeler qu'on appelle *terme* d'une somme algébrique le terme *avec le signe qui le précède.*

Ainsi on a :

$$(a - b + c - d)\, m = am - bm + cm - dm.$$
$$(a - b + c - d)(-m) = a(-m) - b(-m) + c(-m) - d(-m)$$
$$= -am + bm - cm + dm.$$

Exemple I. — Soit à multiplier $2 - 3 + 5$ par $+3$. On a :

$$(2 - 3 + 5)(+3) = 2(+3) - 3(+3) + 5(+3)$$
$$= 6 - 9 + 15 = +12.$$

Or,
$$2 - 3 + 5 = +4,$$
et on a bien
$$(+4) \cdot (+3) = +12.$$

Exemple II. — Soit à multiplier $+3 - (-5) + (-2)$ par -3

On a : $[+3-(-5)+(-2)](-3)$
$$= +3(-3)-(-5)(-3)+(-2)(-3)$$
$$= -9-(+15)+(+6) = -9-15+6 = -18.$$
Or, $+3-(-5)+(-2) = +3+5-2 = +6$
et on a bien $(+6)(-3) = -18.$

49. — Théorème. — ***Le produit de deux sommes algébriques est égal à la somme des produits obtenus en multipliant successivement tous les termes du premier facteur par tous les termes du second.***

Ici encore il ne faut pas oublier que chaque terme doit être pris *avec son signe*.

Ainsi on a : $(a-b+c)(d-f)$
$$= ad-bd-cd+a(-f)-b(-f)+c(-f)$$
$$= ad-bd+cd-af+bf-cf.$$

Nous nous contenterons de *vérifier* ce théorème sur des exemples numériques.

Exemple I. — Soit à effectuer le produit :
$$(4-5+3)(12-7)$$
$$= 4\cdot 12-5\cdot 12+3\cdot 12+4(-7)-5(-7)+3(-7)$$
$$= 48-60+36-28+35-21 = 119-109 = +10.$$
Or, $4-5+3 = +2,\quad 12-7 = +5,$
et on a bien : $(+2)(+5) = +10.$

Exemple II. — Considérons le produit :
$$[+12+(-5)-(-2)][-5-(-3)]$$
$$= +12(-5)+(-5)(-5)-(-2)(-5)$$
$$-12(-3)-(-5)(-3)+(-2)(-3)$$
$$= -60+25-10+36-15+6 = -18.$$
Or, $+12+(-5)-(-2) = 12-5+2 = +9,$
$$-5-(-3) = -5+3 = -2$$
et on a bien $(+9)(-2) = -18.$

50. — Application I. — ***Le carré d'une somme est égal à la somme des carrés des deux termes augmentée du double produit de ces deux termes.***

On a, en effet, d'après ce qui précède,
$$(a+b)^2 = (a+b)\ (a+b) = aa+ba+ab+bb$$
comme $aa = a^2,\ bb = b^2$ et $ba = ab,$
ceci donne : $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

car $ab + ab$ est égal à 2 fois ab ou $2ab$.

51. — Application II. — *Le carré d'une différence est égal à la somme des carrés des deux termes diminuée du double produit de ces deux termes.*

On a, en appliquant le théorème du n° **49** :

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\,(a-b) = aa + a(-b) - ba - b(-b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\end{aligned}$$

car

$$-ab - ba = -ab - ab \text{ est égal à 2 fois } (-ab) \text{ ou } -2ab.$$

52. — Application III. — *Le produit d'une somme par une différence est égal à la différence des carrés des deux termes.*

On a, en effet :

$$\begin{aligned}(a+b)\,(a-b) &= aa + ba + a(-b) + b(-b) \\ &= a^2 + ab - ab - b^2.\end{aligned}$$

Or $ab - ab = 0$

Donc $(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$.

EXEMPLES :

$$(4+3)^2 = 4^2 + 3^2 + 2\cdot 4\cdot 3,$$
$$(4-3)^2 = 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3,$$
$$(4+3)\,(4-3) = 4^2 - 3^2.$$

53. — Quotient de deux nombres. — *On appelle* **quotient** *de deux nombres, l'un appelé* **dividende**, *l'autre* **diviseur**, *un troisième nombre dont le produit par le diviseur est égal au dividende.*

En algèbre, pour indiquer un quotient on emploie toujours le *trait de fraction.*

Ainsi $\frac{a}{b}$ désigne le quotient de a par b.

On peut encore dire que $\frac{a}{b}$ est une *fraction* dont a est le *numérateur* et b le *dénominateur.*

54. — Règle. — *Le quotient de deux nombres algébriques a pour valeur absolue le quotient des valeurs absolues des deux nombres donnés et pour signe (+) ou (—) suivant que ces deux nombres sont de même signe ou non.*

En d'autres termes le signe du quotient s'obtient en appliquant la *règle des signes* (n° **41**).

Le diviseur ou dénominateur doit toujours être différent de zéro. Une fraction de dénominateur zéro n'a pas de sens.

EXEMPLES :

$$\frac{+3}{+4}=+\frac{3}{4} \quad , \quad \frac{-3}{+4}=-\frac{3}{4} \quad , \quad \frac{-5}{-2}=+\frac{5}{2},$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(+\frac{3}{5}\right)}=-\frac{5}{6} \quad , \quad \frac{\left(+\frac{3}{4}\right)}{-5}=-\frac{3}{20}.$$

L'exactitude de la règle précédente résulte immédiatement des définitions de la multiplication et de la division.

55. — **Fractions**. — Les fractions algébriques jouissent des mêmes propriétés que les fractions arithmétiques.

Nous rappellerons brièvement ces propriétés.

56. — ***On peut, sans changer la valeur d'une fraction, multiplier les deux termes par un même nombre.***

Car, en faisant cela, on ne change ni la valeur absolue, ni le signe de la fraction.

Ainsi :

$$\frac{-4}{7}=\frac{(-4)\,(-2)}{7\,(-2)}=\frac{8}{-14} \quad , \quad \frac{3}{5}=\frac{3\,(-5)}{5\,(-5)}=\frac{-15}{-25}.$$

En particulier, on peut, sans changer la valeur d'une fraction, changer les signes des deux termes.

Car cela revient à multiplier les deux termes par -1.

Ainsi : $$\frac{4}{5}=\frac{-4}{-5} \quad , \quad \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{-2}.$$

57. — Cette propriété permet de *réduire plusieurs fractions au même dénominateur*, en multipliant chacune d'elles par le produit des dénominateurs des autres.

EXEMPLE I. — *Réduire au même dénominateur :*

$$\frac{a}{b} \quad , \quad \frac{c}{d} \quad , \quad \frac{e}{f} \quad ,$$

On a $\frac{a}{b}=\frac{adf}{bdf}$, $\frac{c}{d}=\frac{cbf}{bdf}$, $\frac{e}{f}=\frac{ebd}{bdf}$.

EXEMPLE II. — *Réduire au même dénominateur :*

$$\frac{-4}{3} \quad , \quad \frac{5}{-6} \quad , \quad \frac{7}{8} \quad .$$

Le plus petit commun multiple de 3, 6 et 8 est 24.
On a :

$$\frac{-4}{3}=\frac{-4\cdot 8}{3\cdot 8}=\frac{-32}{24} \quad , \quad \frac{5}{-6}=\frac{5(-4)}{-6(-4)}=\frac{-20}{24},$$

$$\frac{7}{8}=\frac{7\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{21}{24}.$$

58. — ***Pour faire la somme algébrique de plusieurs fractions, on les réduit au même dénominateur. On fait la somme algébrique des numérateurs en conservant le dénominateur commun.***

Ceci résulte immédiatement du théorème du n° **48**. Pour prouver que l'on a, par exemple,

$$\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}+\frac{d}{p} = \frac{a+b-c+d}{p}$$

il suffit de prouver qu'en multipliant le premier membre par p, on trouve $a+b-c+d$, or on a (n° **48**)

$$\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{p}-\frac{c}{p}+\frac{d}{p}\right)p = \frac{a}{p}p+\frac{b}{p}p-\frac{c}{p}p+\frac{d}{p}p$$
$$=a+b-c+d.$$

EXEMPLE I. — *Soit à faire la somme*

$$\frac{4}{3}-\frac{5}{6}+\frac{7}{8}-\frac{1}{12}$$

elle s'écrit, en réduisant les fractions au même dénominateur 24 :

$$\frac{32}{24}-\frac{20}{24}+\frac{21}{24}-\frac{2}{24}=\frac{32-20+21-2}{24}=\frac{31}{24} \quad .$$

EXEMPLE II. — *Soit à faire la somme :*

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}.$$

on a (n° **52**) :

$$\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-b}{a^2-b^2} \quad .$$

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a+b}{(a+b)\ (a-b)}=\frac{a+b}{a^2-b^2}\ .$$

Donc :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{a-b\ +\ a+b}{a^2-b^2}=\frac{a+a}{a^2-b^2}$$

car $b-b=0$. D'ailleurs $a+a$ c'est 2 *fois* a ou $2a$. Donc :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}\ .$$

59. — ***Le produit de plusieurs fractions algébriques est une fraction qui a pour numérateur le produit des numérateurs et pour dénominateur le produit des dénominateurs.***

Ainsi
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{g}=\frac{acf}{bdg}\ .$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{7}\right)=\frac{(-1)\ (+2)\ (-5)}{2\cdot3\cdot7}=+\frac{5}{21}.$$

En particulier, pour élever une fraction à une certaine puissance, on élève les deux termes à cette puissance.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^3=\frac{(-3)^3}{5^3}=\frac{-27}{125}.$$

60. — ***Pour faire le quotient de deux fractions algébriques, on multiplie la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.***

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{\left(-\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)}=-\frac{4\cdot6}{3\cdot5}=-\frac{24}{15}.$$

61. — **Théorème.** — ***Le quotient de deux puissances d'un même nombre est une puissance de ce nombre qui a pour exposant l'excès de l'exposant du numérateur sur celui du dénominateur.***

Supposons qu'on veuille diviser a^7 par a^4. On a : $a^7=a^4\cdot a^3$

(n° **47**), par suite

$$\frac{a^7}{a^4} = \frac{a^4 \cdot a^3}{a^4} = a^3$$

De même :

$$\frac{a^8}{a^3} = a^{8-3} = a^5,$$

$$\frac{4^4}{4^3} = 4^{4-3} = 4^1 = 4.$$

62. — Exposant zéro. — Considérons le quotient de deux puissances d'un *même* nombre avec le *même* exposant. Soit, par exemple,

$$\frac{5^4}{5^4} = 1.$$

Ce quotient est égal à 1, puisque c'est une fraction dont les deux termes sont égaux.

Or, si on applique le théorème précédent, on est conduit à l'égalité

$$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0.$$

On est donc conduit à admettre que la puissance d'exposant *zéro* d'un nombre est égale à 1.

D'une façon plus générale, soit le quotient

$$1 = \frac{a^p}{a^p} = a^{p-p} = a^0.$$

L'application de la règle précédente conduit encore à l'égalité

$$a^0 = 1;$$

et ceci quel que soit le nombre a.

C'est pour cette raison qu'on a été amené à la *convention* suivante :

***La puissance d'exposant* zéro *d'un nombre quelconque est égale à* 1.**

Ainsi on a :

$$a^0 = b^0 = 5^0 = 3^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1.$$

63. — Expression algébrique. — Nous avons maintenant défini toutes les opérations ordinaires du calcul pour les nombres positifs et négatifs. Nous pourrons donc opérer sur ces nombres comme sur les nombres arithmétiques (positifs). La seule remarque à faire est que nous n'avons pas défini *l'extraction de la racine* pour un nombre *négatif.*

Il faudra donc, dans la suite, avoir soin de n'indiquer des extractions de racines que pour des nombres arithmétiques, c'est-à-dire pour des nombres positifs, les seuls pour lesquels cette opération a un sens.

Cela étant,

On appelle ***expression algébrique****, l'indication d'un certain nombre d'opérations à effectuer sur des nombres algébriques ou des lettres censées représenter de tels nombres.*

Une telle expression aura toujours un sens, pourvu que les dénominateurs, s'il y en a, soient *différents de zéro* et que les radicaux, s'il y en a, ne portent que sur des quantités *positives.*

Par exemple,

$$(a+b)c, \qquad \frac{a^2-b^2}{ab}, \qquad \frac{4a^3+5b^4+3c^2}{a^2+b^2},$$

$$\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \frac{25}{3}x^2y-\frac{4}{5}xy^3+y^4,$$

sont des *expressions algébriques.*

64. — Valeur numérique d'une expression algébrique. — *On appelle* ***valeur numérique*** *d'une expression algébrique, pour certaines valeurs attribuées aux lettres qui y figurent, le nombre que l'on obtient en remplaçant les lettres par les nombres et en effectuant les calculs indiqués.*

Ainsi, par exemple, la valeur numérique de l'expression

$$(a+b)c$$

pour les valeurs

$$a = 3, \qquad b = 5, \qquad c = 2$$

attribuées aux lettres, est :

$$(3 + 5).2 = 16$$

De même, la valeur numérique de l'expression

$$\frac{4a^3 + 5b^4 + 3c^2}{a^2 + b^2}$$

pour les valeurs

$$a = -2, \qquad b = 1, \qquad c = 2,$$

attribuées aux lettres, est :

$$\frac{4(-2)^3 + 5.1^4 + 3.2^2}{(-2)^2 + 1^2} = \frac{-32 + 5 + 12}{4 + 1} = \frac{-15}{5} = -3.$$

Chaque fois qu'on a une formule, le second membre est une *expression algébrique* et, pour calculer la valeur de la quantité fournie par cette formule, on calcule la *valeur numérique* de l'expression pour certaines valeurs des lettres.

Ainsi, par exemple, l'aire S d'un cercle de rayon R est donnée par la formule

$$S = \pi R^2 \qquad \text{où} \qquad \pi = 3,1416.$$

$\pi R^2 = 3,1416 R^2$ est une *expression algébrique.*

Calculer l'aire d'un cercle de rayon 3 mètres, c'est calculer la valeur numérique de cette expression pour $R = 3$. Ceci donne :

$$S = 3,1416 \cdot 9 = 28^{mq},2744.$$

De même, l'hypoténuse a d'un triangle rectangle, dont les deux côtés de l'angle droit sont b et c, est donnée par la formule

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Pour calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont 4 mètres et 3 mètres, il n'y a qu'à calculer la valeur numérique de l'expression $\sqrt{b^2 + c^2}$ pour $b = 4$, $c = 3$, on trouve ainsi :

$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5^m.$$

§ 5. — Inégalités.

65. — **Définitions.** — *On dit que le nombre* a *est* **plus grand** *que le nombre* b *lorsque la différence* a — b *est positive.*

Au contraire, on dit que le nombre a *est* **plus petit** *que le nombre* b *lorsque la différence* a — b *est négative.*

On se sert des signes $>$ et $<$ comme en arithmétique (n° 5).

Ainsi la différence $(+5) - (-2) = +7$
est positive, donc $+5 > -2$.

La différence $(-5) - (-3) = -2$
est négative, donc $-5 < -2$.

De cette définition il résulte de suite une série de conséquences.

66. — *Tout nombre positif est plus grand que zéro et tout nombre négatif est plus petit que zéro.*

Car la différence $a - 0$, étant égale à a, est de même signe que a.

Donc si a est positif, elle est positive et

$$a > 0.$$

Si a est négatif elle est négative et

$$a < 0.$$

Dorénavant, pour écrire qu'un nombre est positif ou négatif, nous écrirons donc qu'il est plus grand ou plus petit que zéro.

$a > 0$ signifie *a positif*,
$a < 0$ » *a négatif*.

67. — *Tout nombre positif est plus grand que tout nombre négatif.*

Car si a est positif et b négatif, $a - b$ est positif parce que c'est la somme de a et $-b$ tous deux positifs.

Ainsi $+4 > -200, \quad +\frac{1}{10} > -1000.$

68. — *De deux nombres négatifs le plus grand est celui qui a la plus petite valeur absolue.*

Ceci résulte de ce que, dans une différence, c'est le plus grand nombre en valeur absolue qui donne son signe. Donc si, dans $a - b$, a est négatif et le plus grand en valeur absolue, $a - b$ est aussi négatif et on a :

$$a < b.$$

Ainsi $$-5 < -2$$

car $$(-5) - (-2) = -5 + 2 = -3.$$

$$-\frac{1}{10} > -10, \quad -0{,}1 > -200.$$

69. — Théorème. — ***On peut ajouter ou retrancher aux deux membres d'une inégalité un même nombre.***

Car dire que $a > b$, c'est dire que $a - b$ est positif. Soit c un nombre quelconque, on a :

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b.$$

Donc $(a + c) - (b + c)$ est aussi positif et

$$a + c > b + c.$$

Cette dernière inégalité se déduit de la première en ajoutant c aux deux membres.

Ainsi $$-4 > -20$$

donc $$-4 + 15 > -20 + 15$$

ou $$+11 > -5.$$

70. — Théorème. — ***Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux membres d'une inégalité par un nombre autre que zéro :***

1° Si ce nonbre est positif, l'inégalité subsiste;

2° Si ce nombre est négatif, l'inégalité change de sens.

Considérons l'inégalité

$$a > b.$$

Ceci signifie que $a - b$ est positif. Donc le produit

$$(a - b)\,c = ac - bc$$

sera du signe de c

Si c est positif, $ac - bc$ est positif, et on a

$$ac > bc.$$

Si c est négatif, $ac - bc$ est négatif, et on a

$$ac < bc.$$

Ainsi $$-\frac{1}{2} > -5,$$

donc $$-\frac{1}{2}\cdot 10 > -5\cdot 10,$$

ou $$-5 > -50;$$

et $$\left(-\frac{1}{2}\right)(-3) < (-5)(-3),$$

ou $$+\frac{3}{2} < +15.$$

EXERCICES

1. Effectuer les opérations suivantes :

$$22-(-9)-(-4); \qquad -(-48)-(-29)+(-77);$$

$$-11\frac{1}{4}-\left(-3\frac{2}{5}\right)-5\frac{1}{2}+\left(-3\frac{1}{3}\right)+10\frac{1}{60};$$

$$12\cdot(-9)\cdot(-5)+(-3)\cdot(-25)\cdot(-4)-125\cdot 17$$
$$\cdot(-8)-(-13)\cdot(-15)(-75);$$

$$-\frac{27}{3}+\frac{-15}{3}-\frac{-84}{4}+\frac{26}{-2}-\frac{32}{-4}-\frac{28}{-4}-\frac{3510}{-117}+\frac{70}{-35}+$$
$$+(-5)\cdot\frac{-21}{-15}.$$

2. Effectuer les opérations suivantes :

$$4\cdot(-1)^2\cdot(1+2-3)-(2+3)(3-1-5)+(-2+1)^2(9-2+1);$$

$$\left(-3-5-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-1-2\right)^2\cdot\left(-1+5+\frac{1}{2}\right)+(-1+2)^3;$$

$$18\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{4}\right)-\left(\frac{+1}{-5}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)+\left(\frac{-2}{-5}\right)\cdot\left(\frac{+4}{-3}\right)-(-2+5);$$

$$8\cdot(-2)^3\cdot(3-2-5)^2-5\cdot(-2)^2(3-2-5)^3+(-3)^2(-2)^2\cdot(-9).$$

3. Étant données les expressions :

$$3a^2-5ab+6a^2b^2; \qquad 15a^2b^3+2a^3b^2-a^5+b^5;$$
$$(a-b)^2+(b-2a)^3-(5a-2b),$$

trouver leurs valeurs numériques quand on donne à a et à b les valeurs suivantes :

$$a=2\ ,\ b=-2; \quad a=-4\ ,\ b=3; \quad a=-3\ ,\ b=-5.$$

4. Étant donnée l'expression :

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

trouver les valeurs numériques qu'elle prend quand on attribue aux lettres a, b, c les valeurs suivantes :

$a=1$, $b=2$, $c=3$; $a=1$, $b=-2$, $c=3$;
$a=-1$, $b=2$, $c=3$; $a=1$, $b=-2$, $c=-3$;
$a=-1$, $b=-2$, $c=+3$; $a=1$, $b=2$, $c=-3$;
$a=-1$, $b=-2$, $c=-3$; $a=-1$, $b=2$, $c=-3$;

5. Donner les valeurs numériques de l'expression :

$$12a-13b+10ab-8bc+ca+4abc,$$

pour

$a=12$, $b=10$, $c=0$; $a=-8$, $b=-2$, $c=-5$.

6. Valeur numérique de l'expression :

$$x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^4-y^5,$$

pour

$x=3$, $y=2$; $x=-5$, $y=4$; $x=10$, $y=-10$.

7. Trouver la valeur de l'expression :

$$(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2+4a^2b^2,$$

pour $a=15$, $b=-8$; $a=-20$, $b=10$.

8. Trouver la valeur de l'expression :

$$bc^2d-c^2bd+abcd+a^2(3bc-4b^2+5c^2)-a^3(7b-8d),$$

pour $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$.

9. Valeurs numériques de l'expression :

$$am(a+m)-\frac{a^4m+am^4}{a^2+2am+m^2},$$

pour $a=2$ $m=-5$; $a=-\frac{2}{3}$ $m=-\frac{3}{4}$.

10. Quelle est la valeur numérique de l'expression :

$$\left(\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$$

1° Pour $x=-9$, $y=1$;
2° Pour $x=-15$, $y=-12$;
3° Pour $x=7$, $y=-8$.

11. Valeur numérique de l'expression :

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{2a+5b}{2b-c}+\frac{a^2-c^2}{a-2b+c},$$

pour $a=-5$, $b=3$, $c=-1$.

12. Trouver la valeur numérique de l'expression :

$$\frac{x+\frac{2x}{x-3}}{x-\frac{2x}{x+3}},$$

pour $x=-\frac{5}{3}$.

13. Valeur numérique de l'expression :

$$\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}}:$$

1° Pour $x=+3$;

2° Pour $x=-3$;

3° Pour $x=-\frac{2}{3}$.

14. Valeurs numériques du produit :

$$\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+4\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-1\right),$$

pour $x=5$ et pour $x=-5$.

15. Trouver la valeur de l'expression :

$$[(x+1)y-(x-1)]^2-[(y+1)x-(y-1)]^2,$$

pour

$$x=+\frac{3}{2}\ ,\ y=+\frac{2}{3};\qquad x=-1\ ,\ y=+1;$$

$$x=+4\ ,\ y=-4;\qquad x=+25\ ,\ y=-7.$$

16. Trouver les valeurs numériques des expressions :

$$a^4+10a^3+35a^2+50a+24$$

$$(-2a^3)^4+(-2a^4)^3-(-3a^6)^2-(-5a^4)^3:$$

1° Pour $a=-1$;

2° Pour $a=-2$;

3° Pour $a=+3$.

17. Calculer :

$$a^{2p-q}\ .\ b^{6p-18}\quad \text{pour}\quad p=3\ ,\ q=6\ ;$$

$$(m+n)^{x-y}:(p+q)^{4x-3z}\quad \text{pour}\quad x=3\ ,\ y=3\ ,\ z=4.$$

18. Trouver la valeur numérique de chacune des expressions :

$$\sqrt{5b^2c}+\sqrt[3]{9ab}-2\sqrt[4]{3c+b-2a};$$

$$\sqrt[3]{c^2+2a}+2\sqrt[4]{c^3-5b^2+a}+\sqrt{9b^2+c^2d}$$

pour $a=1\ ,\ b=3\ ,\ c=5\ ,\ d=0$.

19. Donner la valeur numérique des expressions :

$$[(a-b)(c+d)-(a-c)(b-d)](a-d);$$

$$b^c-c^b \quad ; \quad \sqrt[b]{a^2+3b+c}$$

pour $a=4 \quad , \quad b=3 \quad , \quad c=2 \quad , \quad d=1.$

20. Trouver la valeur de l'expression :

$$\frac{x^3-4x}{x^4-4x^2+16}$$

pour $x=1+\sqrt{5}$

21. Le côté a d'un triangle, opposé à un angle de 60°, est donné en fonction des deux autres côtés b et c, par la formule :

$$a=\sqrt{b^2+c^2-bc.}$$

L'expression de la surface S d'un triangle en fonction des 3 côtés est

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dans laquelle on a :

$$p=\frac{a+b+c}{2}.$$

Calculer d'après cela la surface S d'un triangle dont les côtés $b=3^m$ et $c=2^m$ comprennent entre eux un angle de 60°, et vérifier que la valeur trouvée pour S est la même que celle qu'on obtient d'après la formule :

$$S=\frac{bc\sqrt{3}}{4}.$$

22, Le volume V d'un cylindre de hauteur H, et dont la base a pour rayon R, a pour expression

$$V=\pi R^2H.$$

Le volume v d'un cône de hauteur h, et dont la base a pour rayon r, a pour expression

$$v=\frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (\pi=3,14).$$

Calculer d'après cela le volume d'un appareil appelé en physique aréomètre, formé d'un cylindre terminé par deux cônes égaux, de mêmes bases que le cylindre. La hauteur du cylindre est de 11 centimètres; celles des cônes ont chacune 37 millimètres et le rayon des bases est de $1^{cm},8$.

23. En désignant par a,b,c les arêtes d'un parallélépipède rectangle, et par V son volume, on a :

$$V=abc$$

Si r et h désignent le rayon de base et la hauteur d'un cylindre de volume v, on a :

$$v=\pi r^2 h \qquad (\pi=3,14).$$

Si enfin P, V et D désignent le poids, le volume et la densité d'un corps, on a la formule :

$$P = VD.$$

D'après cela : on a une planche en sapin de $1^m,5$ de longueur, 17 centimètres de largeur et 35 millimètres d'épaisseur, dans laquelle on a percé 9 trous cylindriques de chacun 3 centimètres de rayon. Quel est le poids de cette planche percée de trous, la densité du sapin étant 0,5?

24. Le volume V d'un tronc de pyramide à bases parallèles, a pour expression :

$$V = \frac{h}{3} \cdot (B + b + \sqrt{Bb}),$$

h désignant la hauteur du tronc, distance des deux bases; B et b les aires des deux bases.

L'aire S d'un polygone régulier convexe de n côtés égaux à c est donnée par la formule

$$S = \frac{1}{2} \cdot nca,$$

a étant l'apothème de ce polygone.

D'autre part l'apothème a d'un polygone régulier convexe inscrit dans un cercle de rayon R a pour expression

$$a = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}},$$

c étant le côté du polygone.

Calculer, d'après ces formules : 1° l'apothème; 2° la surface d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de $0^m,15$ de rayon, le côté de l'hexagone inscrit étant d'ailleurs égal au rayon; 3° le volume d'un tronc de pyramide de 60 centimètres de hauteur, les bases de ce tronc de pyramide étant deux hexagones réguliers inscrits, l'un dans un cercle de $0^m,15$ de rayon, et l'autre dans un cercle de $0^m,10$ de rayon.

CHAPITRE II

APPLICATIONS DES NOMBRES ALGÉBRIQUES

§ 1. — Segments. — Températures.

71. — Définition. — *Nous appellerons* **segment** *une portion de droite parcourue dans un certain sens que nous nommerons le* **sens** *du segment.*

*Le point de départ se nomme l'***origine** *du segment, le point d'arrivée se nomme l'***extrémité** *du segment.*

On désigne un segment par deux lettres, comme on désigne en géométrie une portion de droite; *mais on a soin de placer toujours la première la lettre qui désigne l'origine.*

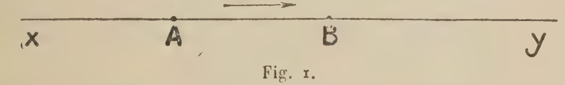


Fig. 1.

Ainsi supposons qu'un mobile se déplace sur une droite xy (fig. 1), si nous disons *qu'il décrit le segment* AB, nous entendons par là qu'il est allé de A (origine) en B (extrémité).

Un segment est donc une distance parcourue par un mobile *dans un sens connu.*

72. — Il résulte de ce qui précède que les deux segments AB et BA sont distincts. C'est la même portion de droite, mais *parcourue dans deux sens différents.*

Dans le premier cas, le mobile va de A vers B.

Dans le second cas, il va de B vers A.

Deux tels segments sont dits *opposés.* Ils ont même longueur, mais des sens opposés.

73. — Mesure algébrique d'un segment. — On sait ce que c'est que la mesure d'une portion de droite, d'une distance. C'est le nombre qui exprime combien de fois

cette distance contient l'unité ou de fractions de l'unité.

Ainsi, si l'on prend pour unité le mètre, et si la mesure d'une longueur est 3,5 c'est que cette longueur contient 3 mètres et 5 décimètres.

Pour donner la mesure d'un *segment*, il ne suffit pas d'indiquer la mesure de sa longueur, car alors deux segments opposés auraient même mesure; il faut, en outre, indiquer le *sens* du segment. On y parvient en employant les nombres positifs et négatifs.

74. — Considérons une droite indéfinie, $x'x$ (fig. 2), et choisissons, sur cette droite, un sens que nous appellerons le *sens positif*. Par exemple, prenons le sens de x' vers x et indiquons-le par une petite flèche au bout de la droite.

Nous nommerons une telle droite, *sur laquelle un sens positif est défini*, un **axe.**

Soient A et B deux points de cet axe.

x′ D −3 C A +2 B x

Fig. 2.

Le sens du segment AB sera le sens positif $x'x$ ou le sens contraire. Si le sens AB est le sens positif, nous dirons que le segment est *positif*, et nous prendrons pour *mesure* du segment la mesure de sa longueur précédée du signe (+).

Si, au contraire, le sens du segment est opposé au sens positif $x'x$, nous dirons que ce segment est *négatif*, et nous prendrons pour *mesure* du segment la mesure de sa longueur précédée du signe (—).

En résumé :

***Ayant choisi**, sur une droite indéfinie, un sens positif, on appellera* **mesure algébrique** *d'un segment de cette droite le nombre algébrique qui a pour valeur absolue la mesure de la longueur du segment et pour signe (+) ou (—) suivant que le sens du segment est le sens positif donné ou non.*

Ainsi, sur la figure 2, le segment AB est positif. Si la longueur de AB est de 2 centimètres, la mesure algébrique de AB sera + 2,

Le segment CD est négatif. Si la longueur de CD est de 3 centimètres, la mesure algébrique du segment CD sera — 3.

Pour désigner la *mesure algébrique* d'un segment, on surmonte les deux lettres qui désignent ce segment par un trait.

Ainsi $\overline{AB}$ signifie *mesure algébrique du segment* AB; $\overline{CD}$ signifie *mesure algébrique du segment* CD.
Sur la figure 2, on a :

$$\overline{AB} = +2, \qquad \overline{CD} = -3.$$

Les mesures algébriques de deux segments opposés sont des nombres opposés.

75. — **Somme de plusieurs segments.** — Chaque fois qu'un voyageur, un courrier, un train, un véhicule se déplace sur une route, il décrit, sur cette route, un *segment;* et lorsqu'on connaît la mesure algébrique de ce segment, on sait non seulement quelle est la distance qui a été parcourue, mais aussi *dans quel sens* ce trajet s'est effectué.

Nous avions déjà, aux nos **29** et **30**, donné un exemple de ce genre.

Si un voyageur fait plusieurs trajets successifs dans des sens différents : tous les trajets dans le sens positif s'ajoutent (arithmétiquement), tous les trajets dans le sens négatif se retranchent (arithmétiquement) des précédents.

On constate donc l'exactitude de la Règle suivante :

Règle. — ***Lorsqu'un mobile décrit sur un axe plusieurs segments consécutifs, le segment qui a pour origine le point de départ et pour extrémité le point final d'arrivée a pour mesure algébrique la somme des mesures algébriques de tous les segments parcourus.***

76. — Problème I. — *Un mobile part d'un point* O *sur une droite et décrit successivement des segments ayant pour mesures algébriques,* $+5^m, -12^m, +6^m, -3^m$. *En quel point de la droite s'est-il arrêté?*

Si A est le point d'arrêt, on a

$$\overline{OA} = +5 - 12 + 6 - 3 = -4^m.$$

Le point d'arrêt est donc à 4 mètres de distance de O du côté *négatif*.

Si nous analysons ce que fait le mobile, nous voyons qu'en partant de O il va d'abord dans le sens positif de O en B à 5 mètres de distance de O (fig. 3). Puis il revient sur ses pas dans le sens négatif.

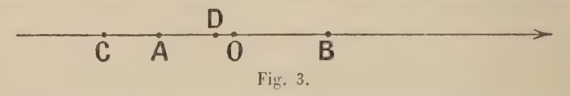


Fig. 3.

Il fait 12 mètres dans ce sens. Il revient donc en O, le dépasse et arrive en C du côté *négatif* à une distance de $12 - 5 = 7$ mètres. Il repart dans le sens positif, se rapproche de O et arrive en D après avoir fait 6 mètres. Ce point D est encore du côté négatif à $7 - 6 = 1$ mètre de O. Enfin de D il fait 3 mètres dans le sens négatif et arrive en A à $3 + 1 = 4$ mètres de O dans le sens négatif.

On voit que l'application de la règle précédente nous a permis d'obtenir d'un seul coup ce résultat *sans faire de figure* et sans faire le long raisonnement que nous venons de donner.

77. — Problème II. — *Un cycliste se déplace sur la route Strasbourg-Paris-Marseille. Il part de Paris dans la direction de Marseille et fait* 125 *kilomètres. Le lendemain il revient dans la direction de Strasbourg et fait* 148 *kilomètres. Le surlendemain il continue dans la direction de Strasbourg et fait* 96 *kilomètres. Enfin, le quatrième jour, il repart dans la direction de Marseille et fait* 165 *kilomètres. A quel point de la route est-il arrivé au bout du quatrième jour?*

Prenons comme sens positif le sens Paris-Marseille. Les mesures algébriques des trajets consécutifs sont donc :

$$+125, \ -148, \ -96, \ +165.$$

La somme est

$$+125 - 148 - 96 + 165 = +46.$$

Le cycliste s'est donc arrêté à 46 kilomètres de Paris *dans le sens Paris-Marseille*.

78. — **Abscisses.** — Considérons un axe sur lequel on

a choisi un sens positif de x' vers x (fig. 4). Soit O un point fixe de cet axe que nous appellerons *origine des abscisses*. Pour définir la position d'un point quelconque M de l'axe, il suffit de savoir : 1° A quelle distance il est de O ; 2° de quel côté de O il se trouve.

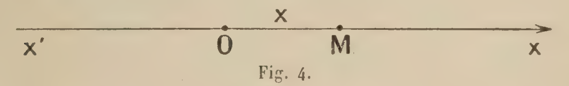


Fig. 4.

On connaîtra tout cela, à la fois, si on connaît la mesure algébrique du segment OM. C'est cette mesure qu'on appelle l'*abscisse* du point M.

On appelle donc* abscisse *d'un point la mesure algébrique du segment qui va de l'origine des abscisses au point en question.

On désigne fréquemment l'abscisse d'un point par la lettre x.

Ainsi le point qui a pour abscisse $x = +4$ est celui qui est à une distance 4 de O du côté positif ; le point qui a pour abscisse -3 est à une distance 3 de O du côté négatif.

Le point O lui-même a pour abscisse *zéro*.

79. — Variation de l'abscisse. — Soit O l'origine des abscisses. Figurons les points dont les abscisses sont : $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$, etc... et -1, -2, -3, -4, -5, ... etc. (fig. 5).

Nous obtenons deux suites indéfinies de points. Ceux d'abscisses positives à droite ; ceux d'abscisses négatives à gauche.

Côté négatif — Côté positif

-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 O +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9 +10 +11

Fig. 5.

Si un point se déplace dans le sens positif, il passe successivement par les points $+1$, $+2$, $+3$, etc., et son abscisse va sans cesse en croissant.

Si le point se déplace dans le sens négatif, il passe

successivement par les points -1, -2, -3, etc., et son abscisse grandit *en valeur absolue* mais *diminue* en réalité, car un nombre négatif devient *plus petit* quand sa valeur absolue augmente.

La figuration précédente est utile pour fixer dans la mémoire *l'ordre de grandeur* des nombres positifs et négatifs.

De deux nombres le plus grand est celui qui est à *la droite* de l'autre.

Ainsi on a :

$$-5<-4<-3<-2<-1<0<+1<+2<+3<+4.$$

80. — Théorème. — ***La mesure algébrique d'un segment est égale à l'abscisse de son extrémité diminuée de l'abscisse de l'origine.***

Considérons, en effet, sur un axe, sur lequel un sens positif est défini, deux points A et B et soit O l'origine des abscisses. Quelle que soit la disposition des trois points O, A et B ; que ce soit la disposition (**1**) ou (**2**) ou (**3**) de la figure 6, ou toute autre disposition, un mobile peut, pour aller de A en B, aller d'abord de A en O, il décrit ainsi le segment AO, puis aller de O en B et il décrit alors le segment OB.

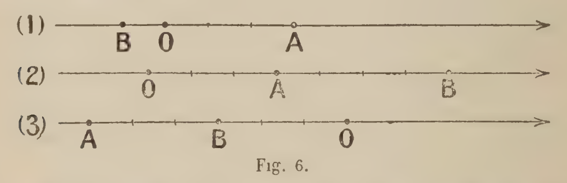


Fig. 6.

D'après la règle du n° **75**, *dans tous les cas*, la mesure algébrique du segment AB est égale à la somme des mesures algébriques des deux segments OB et AO, on a donc :

$$\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}.$$

Mais les segments AO et OA étant opposes, on a :

$$\overline{AO}=-\overline{OA}.$$

Donc, on en conclut,

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Exemple I. — Soit [fig. 6 (**1**)]

$$\overline{OA} = +3, \qquad \overline{OB} = -4,$$

on a : $\overline{AB} = -1 - (+3) = -4.$

Exemple II. — Soit [fig. 6 (**2**)]

$$\overline{OA} = +3, \qquad \overline{OB} = +7,$$

on a : $\overline{AB} = +7 - (+3) = +4.$

Exemple III. — Soit encore [fig. 6 (**3**)]

$$\overline{OA} = -6\ ,\ \overline{OB} = -3,$$

et on a : $\overline{AB} = -3 - (-6) = +3.$

81. — Degrés thermométriques. — Le thermomètre est un instrument qui sert à mesurer la température. Il est formé d'une petite ampoule de verre terminée par un long tube de verre très étroit. L'ampoule contient du mercure ou de l'alcool (fig. 7), qui remplit encore partiellement le tube de verre qu'on appelle la *tige* du thermomètre.

La tige porte une graduation et le point de la graduation où s'arrête l'extrémité de la colonne de mercure indique la *température.*

Ainsi, sur la figure, la colonne de mercure s'arrête à la graduation numérotée 24. La température de l'air ou du liquide dans lequel se trouve le thermomètre est donc de 24 *degrés centigrades.*

Fig. 7.

Lorsqu'on plonge le thermomètre dans de la glace fondante, la colonne s'arrête au point marqué o.

Lorsqu'on *chauffe* le thermomètre, la colonne *monte* et si on plonge l'instrument dans de l'eau bouillante, il marque + 100.

Si, au contraire, on plonge le thermomètre dans un liquide *plus froid* que la glace, la colonne *descend* au-dessous du zéro.

On convient d'affecter du signe (+) les degrés *au-dessus* de zéro, ce qu'on appelle communément les degrés *de chaud;* et d'affecter du signe (—) les degrés *au-dessous* de zéro, ce qu'on appelle communément les degrés *de froid.*

La mesure d'une température est donc un nombre *algébrique*, positif ou négatif.

82. — Calcul d'une variation de température. — Lorsque la colonne de mercure monte ou descend dans la tige, son extrémité peut être assimilée à un mobile qui décrit un segment. Le numéro de la graduation où s'arrête la colonne est une véritable abscisse, l'origine des abscisses étant le *zéro.*

Lorsque la colonne va de la graduation A à la graduation B, la mesure algébrique $\overline{AB}$ du segment décrit est la mesure de la variation de la température.

Pour calculer cette variation, nous pouvons donc appliquer le théorème du n° **80** et prendre l'excès de l'abscisse de l'extrémité B, qui est la température *finale*, sur l'abscisse de A, qui est la température *initiale.*

D'où la règle suivante :

Lorsque la colonne thermométrique va d'une graduation à une autre, la mesure algébrique de la variation de température est l'excès de la température finale sur la température initiale.

Si la mesure algébrique de la variation est *positive*, c'est que la colonne a *monté*, la température s'est *élevée.* Si cette mesure est *négative*, la colonne est *descendue*, la température s'est *abaissée.*

Exemple I. — *Le 1er février à minuit la température était — 3; le même jour à midi elle était + 9. Quelle a été la variation de la température dans la matinée du 1er février?*

La température *initiale* était — 3; la température finale + 9.

Cette variation a donc été :

$$+9-(-3)=+12.$$

La température s'est donc *élevée* de 12 degrés.

EXEMPLE II. — *Le 1[er] janvier à midi la température était* $+8$, *à minuit elle était* $-7,5$. *Quelle a été la variation de température dans cette demi-journée?*

La température initiale est $+8$; la température finale est $-7,5$. Donc, cette variation a été :

$$-7,5-(+8)=-15,5.$$

La température s'est *abaissée* de 15,5 degrés.

83. — Changement d'origine des abscisses. — Considérons un axe (fig. 8) sur lequel un sens positif est choisi et prenons sur cet axe deux points fixes O et O′.

Soit M un point quelconque de l'axe. Désignons par x son abscisse $\overline{OM}$, quand on prend O pour origine des abscisses, et par x' son abscisse $\overline{O'M}$, lorsqu'on prend O pour origine.

O O' M

Fig. 8.

Proposons-nous de calculer x' connaissant x. Ceci résulte immédiatement de l'application du théorème du n° **80**, au segment $\overline{O'M}$. On a, en effet,

$$\overline{O'M}=\overline{OM}-\overline{OO'}.$$

$\overline{OO'}$ c'est l'abscisse de O′ avec l'origine O. Désignons-la par a, et nous avons alors :

$$x'=x-a. \qquad (1)$$

Cette égalité est la *formule* qui permet de calculer x' connaissant x et a. Elle s'exprime ainsi en langage ordinaire :

La nouvelle abscisse est égale à l'ancienne diminuée de l'abscisse de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne origine.

EXEMPLE. — Supposons $\overline{OO'}=+3$.

La formule (1) devient :

$$x'=x-3.$$

pour $x = +4$, on a $x' = +1$;
pour $x = +2$, on a $x' = -1$;
pour $x = -3$, on a $x' = -6$.

84. — **Température absolue.** — On appelle en physique *température absolue* la température mesurée en prenant comme origine des températures celle qui a pour mesure — 273 degrés centigrades.

Le calcul d'une température absolue, lorsqu'on connaît la température en degrés centigrades, n'est donc qu'un changement d'origine où l'abscisse de la nouvelle origine est — 273.

Si donc t désigne la température en degrés centigrades et T la température absolue, on a, en appliquant la formule (1) où l'on fait

$$x = t, \quad x' = T, \quad a = -273,$$
$$T = t + 273.$$

La température absolue s'obtient donc en ajoutant à la température en degrés centigrades le nombre fixe 273.

Ainsi :
pour $t = +15^0$, on a $T = +288^0$;
pour $t = -52^0$, on a $T = +221^0$.

On démontre en physique que la température d'un corps quelconque ne peut jamais être inférieure à — 273 degrés centigrades. Il en résulte que la *température absolue est toujours positive.*

§ 2. — Le Temps

85. — **Unités de temps.** — Une *année* contient 365 *jours*, un *jour* contient 24 *heures*, une *heure* contient 60 *minutes* et une *minute* contient 60 *secondes.*

Pour mesurer un temps on peut prendre comme unité l'année, le jour, l'heure, la minute ou la seconde.

Les unités les plus fréquemment employées sont : l'*année* et le *jour* dans les questions financières, l'*heure* et la *seconde* dans les questions de mouvement.

L'unité ayant été choisie, il conviendra toujours dans les calculs d'exprimer la mesure arithmétique d'un temps en unités et *fractions décimales* d'unités. Nous supposerons donc toujours, dans la suite, que la conversion des temps en nombres décimaux a été effectuée.

C'est d'ailleurs une conversion qu'on a appris à faire en arithmétique[1].

Ainsi un temps de $3^h 30^m$ s'écrira $3^h,5$.
Un temps de $28^m 5^{sec}$ s'écrira, *en secondes*, 1685^{sec}.

86. — **Repérage des instants par rapport à une origine.** — Pour fixer communément un instant dans une journée, on dit l'*heure qu'il est* à cet instant. Ainsi, si on dit qu'il est 2 heures et demie de l'après-midi, on entend par là qu'à cet instant il s'est écoulé 2 heures et demie depuis midi, c'est-à-dire depuis l'instant de la journée où le soleil a passé au méridien.

On voit donc qu'en somme midi est une *origine des temps* et qu'on indique un instant en énonçant le nombre d'heures et de fractions d'heure qui se sont écoulées depuis cet instant origine.

Mais cette façon d'indiquer un instant est insuffisante, car d'abord elle ne peut servir que *pour une même journée* et, ensuite, il faut toujours dire s'il s'agit du *matin* ou du *soir*. Quand je dis : il est 2 heures 1/2, je ne dis pas de quel jour il s'agit ; je ne sais pas non plus s'il s'agit du matin ou du soir.

Pour pouvoir introduire le temps dans les calculs de l'algèbre il faut donc employer une mesure plus précise.

On y parvient par l'emploi des nombres positifs et négatifs.

Choisissons un instant quelconque comme **origine des temps**. *Ceci fait, nous indiquerons sans ambiguïté un instant quelconque en donnant le nombre d'heures et fractions d'heure qui le séparent de l'origine des temps et en ayant*

(1) Voir notre *Cours abrégé d'arithmétique*, Livre III, Chap. III, § 3.

soin de donner le signe (+) à tous les instants qui* suivent *l'origine et le signe (—) à ceux qui* précèdent *l'origine.

Par exemple, prenons comme origine des temps *midi du* 1er *janvier* 1903.

L'instant + 4,5 sera alors celui qui a eu lieu 4^h 1/2 *après* midi du 1er janvier 1903. Ce sera donc 4^h 1/2 de l'après-midi du 1er janvier 1903.

L'instant + 49 heures est celui qui a eu lieu 49 heures *après* midi du 1er janvier. Ce sera donc 1 heure de l'après-midi du 3 janvier.

L'instant — 3^h,25 est celui qui a eu lieu 3^h 1/4 *avant* midi du 1er janvier 1903. Ce sera donc 8^h 3/4 du matin du 1er janvier 1903.

L'instant — 24 est celui qui a *précédé* de 24 heures midi du 1er janvier 1903. C'est donc midi du 31 décembre 1902.

Et ainsi de suite.

Un instant est repéré par un nombre positif ou négatif suivant qu'il suit ou qu'il précède l'origine des temps.

87. — Horloges. — On pourrait fabriquer une horloge pour marquer les instants de la façon suivante : Dans une longue planchette est pratiquée (fig. 9) une rainure longitudinale. Cette rainure est graduée et porte des numéros

$$-4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \text{etc...}$$

s'étendant dans les deux sens à partir du *zéro*.

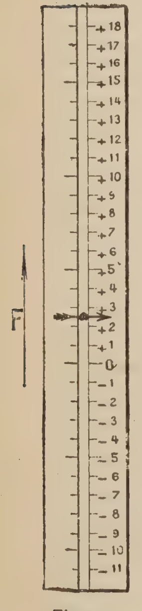


Fig. 9.

Dans la rainure glisse, dans le sens de la flèche F, un *index* qui est mû par un mouvement d'horlogerie qui est réglé de telle façon que l'index soit au point 0 à l'origine des temps, au point — 3 à l'instant — 3, au point + 6 à l'instant + 6 et ainsi de suite. En d'autres termes, l'index indiquera, à chaque instant, le numéro positif ou négatif de cet instant.

Dans une telle horloge, un instant quelconque serait repéré comme un point sur une droite par une abscisse. Elle permettrait donc d'assimiler les instants à des abscisses.

Une telle horloge nous facilitera les raisonnements et les calculs sur les temps; mais, dans la pratique, elle serait irréalisable, car il faudrait une planchette *illimitée* dans les deux sens.

En fait, au lieu de l'horloge *rectiligne* que nous venons d'imaginer, on emploie une horloge *circulaire*.

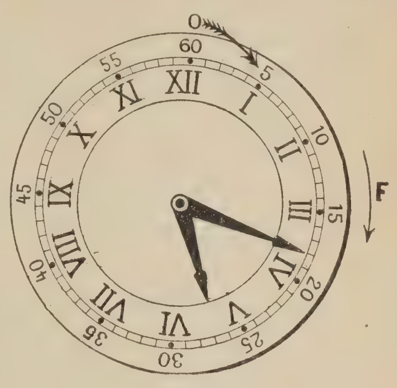


Fig. 10.

Le cadran de cette horloge porte deux cercles concentriques et deux aiguilles. La pointe de la grande aiguille se déplace, dans le sens de la flèche F (fig. 10), sur le grand cercle partagé en 60 parties égales, numérotées de 0 à 60. Cette grande aiguille fait un tour en *une* heure ou 60 minutes. Si donc elle est à l'origine des temps au point O, elle indique, par sa position, le nombre des minutes qui se sont écoulées depuis l'instant origine.

S'il n'y avait que la grande aiguille, l'horloge ne pourrait marquer que les instants pendant une heure. Au bout d'une heure elle aurait fait un tour et recommencerait à marquer les mêmes numéros qu'auparavant. Pour savoir l'heure exacte, l'instant exact, il faut donc savoir combien de tours et de fractions de tour a faits la grande aiguille. Le rôle de la petite aiguille est d'indiquer le nombre des tours *entiers* de la grande. Cette petite aiguille tourne dans le même sens que la grande, mais moins vite. Elle avance d'un *douzième* de tour par heure et les numéros des tours faits par la grande sont inscrits en chiffres romains sur le petit cercle que décrit la pointe de cette

petite aiguille. Si donc, comme dans la figure 10, la petite aiguille est entre V et VI et la grande aiguille au numéro 18, cela veut dire que la grande aiguille a fait 5 tours plus une fraction de 18 soixantièmes. Il s'est donc écoulé depuis l'origine des temps 5 heures 18 minutes.

On pourrait encore dire ici que les aiguilles indiquent le *chemin* parcouru par la grande. Le chemin est de 5 tours plus $\frac{18}{60}$ de tour. Ce chemin pourrait encore être comparé à une abscisse ; mais, pour la clarté des raisonnements, il sera plus commode de raisonner sur l'horloge *rectiligne*.

88. — **Mesure d'un intervalle de temps.** — Étant donnés deux événements A et B, si je dis qu'ils sont séparés par un intervalle de temps de 4 heures, je ne suis pas exactement fixé sur leurs positions relatives, car je ne sais pas quel est celui des deux événements qui a eu lieu le premier.

L'événement A peut *précéder* ou *suivre* l'événement B.

L'emploi des nombres positifs et négatifs nous permet de faire la distinction.

Nous appellerons **mesure algébrique de l'intervalle de temps** *qui va de l'instant* A *à l'instant* B, *le nombre qui a pour valeur absolue la mesure du temps qui sépare les deux instants et pour signe le signe* (+) *ou le signe* (—), *suivant que* A *précède ou suit* B.

Ainsi la mesure algébrique de l'intervalle de temps qui va de 2 heures de l'après-midi à 5 heures est + 3. La mesure algébrique de l'intervalle de temps qui va de 6 heures du matin à 1 heure du même matin est — 5.

89. — Ceci posé, si nous nous reportons à l'horloge rectiligne (fig. 9), nous voyons que la mesure algébrique d'un intervalle de temps est la même que celle du segment qui a pour origine la position de l'index à l'instant *initial* et pour extrémité la position de l'index à l'instant *final*.

Comme les abscisses de l'index dans les deux positions sont précisément les nombres qui repèrent les *instants* correspondants, on a immédiatement la règle suivante en appliquant le théorème du n° **80** :

La mesure algébrique d'un intervalle de temps est égale à l'excès du nombre qui repère l'instant final sur celui qui repère l'instant initial.

Exemple I. — *Quel est l'intervalle de temps qui va de* $8^h\ 1/4$ *du matin à* $5^h\ 1/2$ *de l'après-midi d'un même jour?*

En prenant comme origine midi, l'instant initial est $-3,75$ et l'instant final $+5,5$; l'intervalle en question est donc :

$$+5,5-(-3,75)=+9,25.$$

Exemple II. — *Quel est l'intervalle de temps qui va de* $2^h\ 1/2$ *du matin à* $7^h\ 3/4$ *du même matin?*

Si on prend comme origine *minuit*, l'instant initial est $+2,5$ et l'instant final est $+7,75$; l'intervalle cherché est donc :

$$+7,75-(+2,5)=+5,25.$$

Nous aurions pu prendre comme origine midi. L'instant initial serait alors $-9,5$ et l'instant final $-4,25$; l'intervalle cherché serait alors

$$-4,25-(-9,25)=+5,25.$$

On voit que l'on trouve bien le même nombre dans les deux cas. La mesure de l'intervalle est indépendante de l'origine choisie.

90. — Chronologie. — Dans la chronologie de l'Histoire on prend comme origine des temps la naissance de Jésus-Christ. Lorsqu'on dit qu'un événement a eu lieu en l'an 1 après Jésus-Christ, on veut dire par là qu'il a eu lieu pendant la *première* année après la naissance du Christ. Il ne s'est donc pas écoulé une année *entière*, mais seulement une fraction d'année depuis la naissance du Christ.

Si on prend comme unité l'année, l'instant en question est donc un nombre plus petit que 1.

Si un événement a eu lieu le 17 février 1903 cela veut dire que cet événement a eu lieu pendant la 1903ième année après la naissance du Christ. Il s'est donc écoulé 1902 ans et 48 jours ou $1902+\frac{48}{365}$ d'année depuis la naissance du Christ.

Pour indiquer une date on pourrait alors employer les nombres positifs et négatifs en donnant le signe (+) aux dates des événements postérieurs à Jésus-Christ et le signe (—) aux dates antérieures à Jésus-Christ.

Ainsi le 17 février 1903 après Jésus-Christ serait l'instant $+\left(1902+\frac{48}{365}\right)$. Le 1er décembre de l'an 5 avant Jésus-Christ serait instant $-\left(4+\frac{30}{365}\right)$, en ne comptant pas le jour même.

91. — Problème. — *Un homme est né le* 17 *novembre de l'an* 31 *av. Jésus-Christ. Il est mort le* 18 *mars de l'an* 43 *après Jésus-Christ. Combien a-t-il vécu?*

L'instant de sa naissance (initial) est $-\left(30+\frac{44}{365}\right)$;

L'instant de sa mort (final) est $+\left(42+\frac{77}{365}\right)$.

La durée de sa vie est l'intervalle de temps qui va de sa naissance à sa mort ; c'est donc (n° **89**) :

$$+\left(42+\frac{77}{365}\right)-\left[-\left(30+\frac{44}{365}\right)\right]=+72+\frac{121}{365}.$$

Cet homme a donc vécu 72 ans et 121 jours.

92. — Remarque. — Il faut essentiellement n'appliquer le repérage des temps pour la chronologie que comme nous l'avons fait. On ne peut pas l'appliquer aux *millésimes* des années. Ceci tient à ce que le millésime d'une année n'indique pas combien d'années séparent l'instant en question de l'instant origine, mais seulement le *numéro d'ordre* de l'année *pendant* laquelle l'événement a eu lieu.

Il n'y a pas d'année numérotée 0. De l'an **1** *avant Jésus-Christ* on passe sans transition à l'an **1** *après Jésus-Christ.*

93. — Changement de l'origine des temps. — L'emploi de l'horloge rectiligne nous ayant montré que les instants peuvent être regardés comme des abscisses et

les intervalles de temps comme des segments, il en résulte que l'on fera un changement d'origine des temps comme on fait un changement d'origine des abscisses.

Si donc t désigne le nombre qui repère un instant avec une première origine, t' le nombre qui repère le même instant avec une seconde origine, et θ le nombre qui repère la seconde origine par *rapport à la première*, on a, en appliquant la formule (1) du n° **83**,

$$t' = t - \theta.$$

Le nombre qui repère un instant par rapport à une nouvelle origine est égal au nombre qui repère le même instant par rapport à l'ancienne origine diminué du nombre qui repère la nouvelle origine par rapport à l'ancienne.

Exemple. — La nouvelle origine est l'instant $-3,5$ avec l'ancienne origine. On a donc $\theta = -3,5$ et $t' = t + 3,5$.

Si $t = +4$, $t' = +7,5$;
$t = -3$, $t' = +0,5$;
$t = -8,5$, $t' = -5$.

94. — Applications. — La formule du changement d'origine peut servir à : calculer l'heure exacte sur une horloge qui avance ou retarde ; à calculer l'heure dans une ville qui n'est pas sur le même méridien que Paris, connaissant l'heure de Paris et la différence des heures.

En voici des exemples :

Problème I. — *Paul a une montre qui retarde de* 5 *minutes. Calculer l'heure exacte lorsque la montre de Paul indique* $3^h\,2^m$?

Dire que la montre de Paul retarde de 5 minutes c'est dire que quand il est midi la montre marque midi *moins* 5.

La nouvelle origine est donc l'instant — 5 sur la montre de Paul. L'heure exacte s'obtient donc en retranchant (-5) de l'heure marquée par la montre, c'est-à-dire en *ajoutant* $+5$.

Il faut donc ajouter 5 minutes à l'heure marquée. Lorsque la montre marque $3^h\,2^m$, il est $3^h\,7^m$.

PROBLÈME II. — *Quand il est midi à Bordeaux, il est midi 11ᵐ 38ˢ à Paris. Comment obtient-on l'heure de Bordeaux connaissant celle de Paris?*

L'origine des temps à Paris est *midi de Paris*, c'est-à-dire l'instant où le soleil passe au méridien de Paris. L'origine des temps à Bordeaux est *midi de Bordeaux*, c'est-à-dire l'instant où le soleil passe au méridien de Bordeaux. Comme Bordeaux et Paris ne sont pas sur le même méridien, l'origine des temps n'est pas la même pour les Parisiens et les Bordelais.

L'origine des temps des Bordelais est l'instant $+(11^{m}38^{s})$ pour les Parisiens.

On obtiendra donc l'heure de Bordeaux en *retranchant* de l'heure de Paris $11^{m}\,38^{s}$.

Ainsi quand il est 3 heures à Paris, il est $2^{h}\,48^{m}\,22^{s}$ à Bordeaux.

§ 3. — Mouvement uniforme.

95. — Définition. — ***On dit qu'un mobile qui se meut sur un axe, sur lequel un sens positif a été choisi, est animé d'un mouvement* uniforme *si les* segments *parcourus par ce mobile dans des temps égaux sont égaux, quelle que soit la valeur commune de ces temps.***

Le segment parcouru dans une heure a toujours même mesure algébrique; le segment parcouru dans une minute a toujours même mesure algébrique, et ainsi de suite.

Il est bon de remarquer qu'il s'agit de *segments*. Ceci implique donc non seulement que les chemins parcourus dans des temps égaux sont égaux, mais aussi que les *sens de parcours* sont les mêmes.

Il en résulte que le mobile *marche toujours dans le même sens.*

96. — Vitesse. — ***On appelle* vitesse *d'un mouvement uniforme la mesure algébrique du segment parcouru dans l'unité de temps.***

La vitesse est donc un nombre positif ou négatif suivant

que le mobile marche ou non dans le sens positif choisi.

La valeur absolue de la vitesse *dépend des unités choisies*. Il est donc essentiel que l'on dise toujours *quelles sont les unités choisies*.

Par exemple, si l'on dit que la vitesse est de 30 kilomètres à l'heure, l'unité de longueur est le kilomètre, l'unité de temps est l'heure.

Il peut être utile de savoir changer d'unités.

Nous traiterons un exemple courant.

Problème. — *Connaissant la vitesse en kilomètres à l'heure, calculer la vitesse en mètres à la seconde.*

Soit V la vitesse en kilomètres à l'heure. Ceci veut dire que dans *une* heure le mobile décrit V kilomètres ou $V \times 1000$ mètres.

Dans une heure il y a 3600 secondes et, comme dans chaque seconde il décrit toujours le même chemin, on obtiendra le chemin parcouru en *une* seconde en partageant $V \times 1000$ en 3600 parties égales. Si donc on appelle v la vitesse en mètres à la seconde, on a :

$$v = \frac{V \times 1000}{3600} = \frac{V}{3,6}.$$

Pour avoir la vitesse en mètres à la seconde, on divise la vitesse en kilomètres à l'heure par 3,6.

Inversement :

$$V = v \times 3,6.$$

Pour avoir la vitesse en kilomètres à l'heure, on multiplie la vitesse en mètres à la seconde par 3,6.

Ainsi un cycliste qui fait 18 kilomètres à l'heure fait $\frac{18}{3,6} = 5$ mètres à la seconde.

Un train qui fait 11 mètres à la seconde fait $39^{Km},6$ à l'heure.

97. — Formule du mouvement uniforme. — Le problème général qu'il s'agit de résoudre est le suivant :

Un mobile qui se meut d'un mouvement uniforme est à un instant initial en* A*; à un instant final il est en* B*; cal-

***culer la mesure algébrique du segment* AB *connaissant la vitesse* v *et l'intervalle de temps* t.**

Il faut de suite remarquer que, dans cet énoncé, on ne suppose rien sur les deux instants ; on ne dit pas si l'instant initial précède ou suit l'instant final.

Si $t > 0$, l'instant initial précède l'instant final : le mobile a donc marché de A vers B.

Si $t < 0$, l'instant initial suit l'instant final : le mobile était donc en B avant d'être en A ; il a marché de B vers A.

Soit $$e = \overline{AB}.$$

Nous allons prouver que, *dans tous les cas*, on a :

$$e = vt. \tag{1}$$

Pour démontrer que les deux nombres e et vt sont égaux il faut prouver : 1° qu'ils ont même valeur absolue ; 2° qu'ils ont même signe.

1° *Ils ont même valeur absolue*. Désignons, en effet, par E, V, T les valeurs absolues de e, v, t. D'après la règle de trois, puisque dans le temps 1, le mobile décrit le chemin V, dans le temps T il décrira T fois plus, ou $V \times T$.

On a donc bien

$$E = V \times T$$

ou : $$|e| = |vt|.$$

2° *Ils ont même signe*. En effet, si t est positif, le mobile va de A vers B, le sens du segment AB est donc le sens du mouvement et $e = \overline{AB}$ a même signe que v et, par suite, que vt.

Si t est négatif, le mobile va de B vers A. Le sens du segment AB est donc contraire au sens du mouvement et $e = \overline{AB}$ est de signe contraire au signe de v. Mais, comme t est négatif, vt sera de signe contraire au signe de v et, par suite, sera bien de même signe que e.

La formule (1) est donc bien *générale*.

Il faut bien se garder de nommer e, dans la formule (1), *le segment parcouru* par le mobile; car c'est inexact quand t est négatif : Lorsque t est négatif le mobile décrit le segment $-e$.

98. — Mouvement curviligne. — Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le mobile décrivait une *ligne droite*; mais tout ce que nous avons dit s'applique encore au cas du mouvement *curviligne*, c'est-à-dire au cas où le mobile décrit un chemin courbe.

On peut, en effet, toujours imaginer qu'on ait *rectifié*, par la pensée, le chemin et raisonner sur ce chemin comme s'il était rectiligne.

Ou, si l'on veut, on peut toujours choisir sur le chemin un *sens positif* et compter les *segments curvilignes* positivement dans ce sens et négativement dans l'autre.

Ainsi, un train qui se déplace sur une voie ferrée ne décrit presque jamais une ligne droite, on peut cependant appliquer tout ce que nous avons dit à la marche de ce train, car il est facile de prendre sur la voie ferrée un sens positif et de mesurer les espaces parcourus sur cette voie positivement dans ce sens et négativement dans l'autre.

Exemple. — *Un train marche sur la ligne Paris-Lyon-Marseille dans le sens de Paris vers Marseille à 90 kilomètres à l'heure. Il a passé à Lyon à $2^h\,35^m$. Où était-il à $1^h\,15^m$?*

Prenons comme unité de temps la minute et comme unité de longueur le kilomètre. Choisissons comme sens positif le sens de marche du train. La vitesse du train est :

$$v = \frac{90}{60} = \frac{3}{2} = +1,5.$$

L'instant initial est $2^h\,35^m$ ou 155 minutes.
L'instant final est $1^h\,15^m$ ou 75 minutes.
L'intervalle de temps t est (n° **89**) :

$$t = 75 - 155 = -80.$$

Le segment qui a pour origine Lyon et pour extrémité le point cherché est

$$e = 1,5 \times (-80) = -120.$$

Le résultat est négatif. Le train était donc, à $1^h\,15^m$, à 120 kilomètres *avant* Lyon.

99. — Calcul du temps. — Puisque e est égal au produit de v par t, on en conclut que t est le quotient de e par v. On a donc :

$$t = \frac{e}{v}; \qquad (2)$$

formule qui permet de calculer t connaissant e et v.

Exemple. — *Un train, allant de Paris à Marseille par Lyon, a passé à Lyon à midi. A quelle heure était-il à Dijon, qui est à 198 kilomètres avant Lyon? La vitesse du train est de 80 kilomètres à l'heure.*

Prenons comme unité de temps l'heure et comme unité de longueur le kilomètre. Choisissons comme sens positif le sens Paris-Marseille.

On a : $e = -198 \quad v = +80.$

$$t = -\frac{198}{80} = -2,475.$$

Le train a passé $2^h,475$ avant midi à Dijon. Or, $0^h,475$ valent $28^m,50$ ou $28^m 30^s$.

Le train a donc passé à Dijon à $2^h\,28^m\,30^s$ avant midi, c'est-à-dire à $9^h\,31^m\,30^s$ *du matin.*

100. — Calcul de la vitesse. — Puisque e est le produit de v par t, c'est que v est le quotient de e par t. On a donc :

$$v = \frac{e}{t}; \qquad (3)$$

formule qui permet de calculer t connaissant e et v.

Exemple : *De Paris à Dijon il y a 315 kilomètres. Un train se trouvait à Paris à $6^h\,38^m$ du matin et à Dijon à $1^h\,59^m$ du matin. Quelle était sa vitesse et son sens de marche?*

Prenons pour sens positif le sens de Paris vers Dijon. On a alors :

$$e = +315,$$

en prenant comme unité de longueur le kilomètre.

Si on prend comme unité de temps la minute, l'instant initial est $+398$ et l'instant final $+119$. L'intervalle de temps t est :

$$t = 119 - 398 = -279.$$

on a ainsi :

$$v = -\frac{315}{279} = -\frac{35}{31} = -1,129.$$

La vitesse est donc de $1^{\text{Km}},129$ *à la minute* et, comme v est négatif, le sens de marche est de *Dijon vers Paris*. La vitesse en kilomètres à l'heure est :

$$1,129 \times 60 = 67^{\text{Km}},740 \text{ à l'heure.}$$

101. — Équation du mouvement uniforme. — La formule du mouvement uniforme se met souvent sous une autre forme qu'on appelle *équation du mouvement uniforme*.

A cet effet, prenons sur la droite que décrit le mobile (fig. 11) un sens positif et une origine O des abscisses.

Soit M_0 la position du mobile à un instant t_0 que nous nommerons instant initial et x_0 l'abscisse $\overline{OM_0}$ de M_0.

M_0 O M

Fig. 11.

Soit M la position du mobile à un instant quelconque t et x l'abscisse $\overline{OM}$ de M. Proposons-nous de calculer x connaissant t. La position initiale du mobile est M_0, sa position finale M : d'après la formule (1) du mouvement uniforme, $\overline{M_0M}$ est égal au produit de la vitesse v par l'intervalle de temps qui va de l'instant initial à l'instant final.

Or cet intervalle de temps est (n° 89) $t - t_0$, et on a :

$$e = \overline{M_0M} = x - x_0.$$

On en conclut :

$$x - x_0 = v\,(t - t_0). \qquad (4)$$

Ce qui s'écrit :

$$x = x_0 + v\,(t - t_0). \qquad (5)$$

C'est là ce qu'on appelle *l'équation du mouvement uniforme*.

Dans cette équation, x_0, v et t_0 sont trois *données*, trois quantités *fixes*, ce qu'on appelle des **constantes**.

Au contraire x et t sont des quantités qui varient à chaque instant, ce qu'on appelle des ***variables***.

La formule ou équation (5) permet alors de calculer l'abscisse x du mobile connaissant t; c'est-à-dire de *déterminer, à chaque instant, la position du mobile sur la droite qu'il parcourt.*

102. — Mouvement curviligne. — La remarque que nous avons faite au nº **98** s'applique encore ici.

La formule (5) que nous avons établie pour un chemin rectiligne s'applique, sans modification, à un chemin curviligne, car on peut toujours prendre sur ce chemin un point fixe comme *origine*, choisir un *sens positif* et compter les distances, à partir de l'origine choisie, positivement dans le premier sens et négativement dans le second.

Exemple. — *Un train part de Paris pour Nancy à midi* 35 *et marche à la vitesse de* 66 *kilomètres à l'heure. En supposant qu'il marche sans arrêts, former son équation de marche.*

Prenons comme sens positif le sens Paris-Nancy; comme unités, le kilomètre et la minute.

On a :

$$v = +1,1$$

Car le train fait $1^{km},1$ à la minute.

L'origine des abscisses étant Paris, on a :

$$t_0 = +35 \qquad x_0 = 0.$$

L'équation (5) donne alors :

$$x = 1,1\,(t - 35).$$

A quelles distances de Paris sera le train à 2^h26, 3^h31, 4^h15, 5^h25, 5^h56?

Il suffit de faire successivement

pour 2^h26,	$t = 146$	et on a :	$x = 122^{km},1$
— 3^h31,	$t = 211$	—	$x = 193^{km},6$
— 4^h15,	$t = 255$	—	$x = 242^{km}$
— 5^h25,	$t = 325$	—	$x = 319^{km}$
— 5^h56,	$t = 356$	—	$x = 353^{km},1$

Comme Nancy est à 353 kilomètres de Paris, il est donc arrivé à Nancy à 5^h56^m.

103. — Calcul de l'instant. — Puisque, d'après la formule (4), $x - x_0$ est le produit de v par $t - t_0$, c'est que $t - t_0$ est le *quotient* de $x - x_0$ par v. On a donc :

$$t - t_0 = \frac{x - x_0}{v}, \qquad \text{ou} \qquad t = t_0 + \frac{x - x_0}{v}. \qquad (6)$$

Cette formule permet de calculer *à quel instant t, le mobile se trouve en un point donné d'abscisse x.*

Exemple. — *Le départ de la première étape de la course de voitures automobiles Paris-Madrid a eu lieu à Versailles le 24 mai 1903. La première voiture est partie à* $3^h 30^m$ *du matin et a marché à la vitesse de 105 kilomètres à l'heure. Quelles auraient été les heures de passage de la voiture aux lieux ci-après si elle n'avait pas eu d'arrêts.*

Versailles (*départ*) . . .	0^{km}	Châtellerault.	284^{km}
Rambouillet	26,5	Poitiers.	316
Chartres.	74	Ruffec	383
Châteaudun.	119	Angoulême	426
Vendôme.	158	Libourne.	527
Tours	215	Bordeaux (*arrivée*) . . .	552

Prenons pour sens positif le sens Paris-Bordeaux ;

Pour origine des abscisses le départ (Versailles) ;

Pour origine des temps minuit de la nuit du 23 au 24 mai 1903 ; pour unités le kilomètre et la minute. On a alors :

$$x_0 = 0 \quad , \quad t_0 = 210 \quad , \quad v = \frac{105}{60} = +1{,}75$$

On a donc : $t = 210 + \dfrac{x}{1{,}75} = 210 + x \times 0{,}5714.$

Il nous suffit alors de faire dans cette formule successivement :

$$x = 26{,}5, \qquad x = 74, \text{ etc.}$$

On a ainsi le tableau suivant :

	t	HEURES DE PASSAGE
Rambouillet.	225,14	$3^h 45^m 8^s$
Chartres	252,28	$4^h 12^m 17^s$
Châteaudun	278	$4^h 38^m 0^s$
Vendôme	300,28	$5^h 0^m 17^s$
Tours	332,85	$5^h 32^m 51^s$
Châtellerault.	372,28	$6^h 12^m 17^s$
Poitiers.	390,56	$6^h 30^m 34^s$
Ruffec	428,85	$7^h 8^m 51^s$
Angoulême	453,42	$7^h 33^m 23^s$
Libourne	511,13	$8^h 31^m 8^s$
Bordeaux (*arrivée*)	525,41	$8^h 45^m 25^s$

§ 4. — Détermination de la position d'un point sur une droite par le rapport de ses distances à deux points fixes de cette droite.

104. — Préliminaires. — Considérons une droite indéfinie et deux points fixes A et B (fig. 12) sur cette droite. Supposons d'abord qu'on ait choisi sur la droite un sens positif et considérons le quotient $\frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}$ des mesures algébriques des segments BM et AM que nous représentons par y :

Fig. 12.

$$y = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}.$$

Remarquons d'abord que la valeur de y est indépendante du sens positif choisi ; car, si on change le sens positif sur la droite, les mesures algébriques des deux segments changent de signe toutes les deux à la fois et le quotient y ne change pas.

Il est donc absolument inutile de dire quel est le sens positif choisi sur AB ; ce sens peut être *arbitraire*.

Si le point M est *entre* B et A, ces deux segments BM et AM sont de sens opposés et y est *négatif*.

Si le point M *n'est pas entre* B et A, les deux segments BM et AM sont de même sens et y est *positif*.

Le signe du rapport y ***indique donc si*** M ***est ou non entre*** B ***et*** A.

Remarquons enfin que y *n'a pas de sens* lorsque M est en A. En effet, dans ce cas, le dénominateur $\overline{AM}$ est *nul* et une fraction qui a pour dénominateur *zéro* n'a pas de sens.

Nous examinerons ce cas particulier à part.

105. — Détermination de la position du point. — A tout point M de la droite AB, autre que A, correspond une valeur de y bien déterminée.

Mais réciproquement, étant donnée la valeur de y positive ou négative, existe-t-il un point M, et *un seul*, tel que l'on ait

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = y. \qquad (1)$$

C'est ce que nous allons chercher.

Prenons, à cet effet, sur AB comme sens positif, le sens de A vers B et le point A comme origine des abscisses.

Soit $\overline{AM} = x$ l'abscisse de M,

$\overline{AB} = a$ l'abscisse de B.

On aura (n° **80**)

$$\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = x - a;$$

et, par suite, l'égalité (1) s'écrit, dans tous les cas,

$$\frac{x - a}{x} = y. \qquad (2)$$

Le problème est donc ramené à ceci :

y étant donné, trouver pour quelles valeurs de x l'égalité (2) est vérifiée.

Puisque y est le quotient de $x - a$ par x,

on a :

$$x - a = yx$$

donc :

$$x = a + yx$$

et aussi :

$$x - yx = a. \qquad (3)$$

Or, en vertu du théorème du n° **48**, on a :

$$x\,(1 - y) = x - yx;$$

l'égalité (3) s'écrit donc finalement :

$$x\,(1 - y) = a. \qquad (4)$$

Si y n'est pas égal à 1, $1 - y$ n'est pas égal à *zéro* et

cette égalité exprime que le nombre cherché x est celui qui, multiplié par $1 - y$, donne pour produit a. C'est donc, par définition du quotient, le quotient de a par $1 - y$. On a ainsi

$$x = \frac{a}{1 - y}.$$

On trouve une valeur de x, et une seule, pourvu que y ne soit pas égal à 1.

Or, il n'y a sur la droite qu'un point, et un seul, ayant l'abscisse x, donc :

A toute valeur de y, différente de 1, correspond sur la droite un point, et un seul.

En résumé :

A tout point M correspond une valeur de y et à toute valeur de y correspond un point, et un seul.

On peut donc dire que la connaissance de y *détermine* le point M sur la droite.

Il y a exception pour le point A et pour $y = 1$.

Examinons à part ces deux exceptions.

106. — Cas où le point est en A. — Lorsque M est en A, le rapport y n'a plus de sens.

Imaginons alors que M, au lieu d'être en A, soit *très voisin* de A. Si M est très voisin de A, la distance AM est très petite et la valeur absolue de $x = \overline{AM}$ est très petite. Si nous considérons alors la fraction

$$y = \frac{x - a}{x}$$

nous voyons que son numérateur est très voisin de $-a$ et son dénominateur voisin de *zéro*. Or, lorsque dans une fraction arithmétique le dénominateur est très petit, le numérateur n'étant pas nul, cette fraction est *très grande*.

Ainsi on a :

$$\frac{1}{0,1} = 10 \quad , \quad \frac{1}{0,01} = 100 \quad ,$$

$$\frac{1}{0,001} = 1000 \; . \; . \; . \; . \quad \frac{1}{0,000001} = 1\,000\,000$$

Plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande.

Si on imagine que le dénominateur devienne de plus en plus petit en valeur absolue, se rapproche de plus en plus de la valeur zéro, *tende vers zéro*, la fraction devient de plus en plus grande et croît *sans limite*, croît *indéfiniment*.

Ainsi la fraction $\frac{1}{x}$, quand x est assez petit, peut devenir plus grande que n'importe quel nombre. Par exemple elle peut devenir plus grande que 1 000 000 000, car il suffit pour cela que x soit plus petit que

$$\frac{1}{1\,000\,000\,000} = 0{,}000\,000\,001\,.$$

Si donc nous considérons le rapport $\frac{x-a}{x}$ quand x est très petit en valeur absolue, il sera très grand en valeur absolue.

Prenons AB pour *unité de longueur*. On a alors $a=1$. Le rapport s'écrit

$$y = \frac{x-1}{x}\,;$$

pour

$$x = +0{,}001, \text{ on a } y = \frac{-0{,}999}{0{,}001} = -999,$$

$$x = -0{,}001, \text{ on a } y = \frac{-1{,}001}{-0{,}001} = +1\,001,$$

$$x = +0{,}000\,001, \text{ on a } y = \frac{-0{,}999\,999}{0{,}000\,001} = -999\,999,$$

$$x = -0{,}000\,001, \text{ on a } y = \frac{-1{,}000\,001}{-0{,}000\,001} = +1\,000\,001,$$

et ainsi de suite.

On voit que, quand x est très petit, y est très grand *en valeur absolue*, soit positif, soit négatif.

On en conclut que, quand M est très voisin de A, y est très grand en valeur absolue.

Quand M se rapproche du point A, *tend vers* A, le rapport y CROÎT INDÉFINIMENT *en valeur absolue*.

On exprime alors ce fait en disant *qu'au point* A, y *est infiniment grand*, et on indique cela par le symbole ∞.

107. — Remarque. — L'examen du cas précédent nous a conduit à considérer une fraction dont la *valeur absolue* croît indéfiniment, c'est-à-dire peut devenir plus grande que n'importe quel nombre arithmétique assignable, si grand qu'il soit.

Or, lorsque cela a lieu, cela peut arriver de deux manières.

La fraction peut être positive, et alors on dit que la fraction *croît indéfiniment par valeurs positives*, ce qu'on représente par le symbole $+\infty$ (qui se lit *plus l'infini*).

Ou bien, la fraction est négative ; on dit alors qu'elle *croît indéfiniment par valeurs négatives* et on indique cela par le symbole $-\infty$ (qui se lit *moins l'infini*).

Ainsi le rapport y est négatif quand x est très petit et positif, et au contraire y est positif quand x est très petit et négatif.

Quand x tend vers zéro par valeurs positives, y croît indéfiniment par valeurs négatives.

Quand x tend vers zéro par valeurs négatives, y croît indéfiniment par valeurs positives.

108. — Cas de $y = 1$. — Nous avons trouvé au n° **105** que x était bien déterminé chaque fois que y était différent de 1. Voyons ce qui arrive pour $y = 1$. On a :

$$x = \frac{a}{1 - y}$$

On voit que pour $y = 1$ le dénominateur de x est égal à *zéro*.

Nous avons donc encore ici affaire à une fraction dont le dénominateur devient nul.

Lorsque y prend des valeurs très voisines de la va-

leur 1, $1 - y$ est, en *valeur absolue*, *très petit*, donc x est, en *valeur absolue*, *très grand*.

On peut donc dire qu'à des valeurs de y très voisines de 1 correspondent des points de la droite AB qui sont *très éloignés*.

Lorsque y *tend vers* 1, se rapproche de la valeur 1, $1 - y$ *tend vers zéro*, se rapproche de la valeur zéro, et x croît indéfiniment.

On peut donc dire que :

Quand y *tend vers* 1, *le point M s'éloigne indéfiniment*.

On exprime encore cela en disant que, lorsque $y = 1$, le point M est *rejeté à l'infini*.

Quand y est plus petit que 1, x est positif.

Quand y est plus grand que 1, x est négatif.

Le point M s'éloigne donc du côté positif ou du côté négatif suivant que y tend vers 1 par valeurs plus petites ou plus grandes.

109. — Variation du rapport. — Pour mieux nous rendre compte de la correspondance entre les valeurs du rapport y et les positions du point M sur la droite AB, nous allons imaginer que le point M décrive toute la droite AB (fig. 13) dans le sens de A vers B [de gauche à droite sur la figure].

Nous avons vu que l'on a :

$$y = \frac{x - a}{x}.$$

Ceci peut s'écrire

$$y = \frac{x}{x} - \frac{a}{x}$$

ou, comme $\frac{x}{x} = 1$,

$$y = 1 - \frac{a}{x}.$$

Lorsque le point M décrit la droite dans le sens AB, son abscisse x va sans cesse en *croissant*.

$\frac{a}{x}$ va donc sans cesse en *diminuant* et $1 - \frac{a}{x}$ ou y va

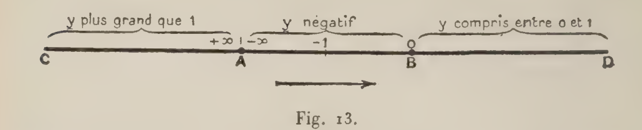


Fig. 13.

en *augmentant*, car il est clair que plus la partie $\frac{a}{x}$ que l'on soustrait de 1 est petite, plus la différence y est grande.

Le rapport y va donc toujours en augmentant.

Lorsque M est très loin à gauche, x est infiniment grand et négatif, y est voisin de $+1$ (n° **108**).

Quand M décrit la portion CA de la droite, y croît depuis la valeur 1, et à mesure qu'il approche de A, y devient de plus en plus grand (n° **106**).

En d'autres termes, quand M *tend* vers A, y tend vers $+\infty$.

Lorsque M passe par A, le rapport y change brusquement de signe et devient négatif. D'abord très grand en valeur absolue et *positif*, il devient très grand en valeur absolue mais *négatif*. On dit que y saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$.

Quand M va de A en B, le rapport est *négatif* et croît depuis une valeur excessivement grande en valeur absolue et négative, depuis $-\infty$, jusqu'à la valeur 0, qu'il atteint quand M est en B.

Enfin, quand M dépasse B, y redevient positif et, M s'éloignant indéfiniment vers la droite de B, vers D, le rapport y tend vers la valeur $+1$. y augmente de 0 à $+1$.

La figure 13 résume les résultats.

110. — Remarque. — Lorsque M est au milieu de AB, on a $y = -1$; dans ce cas, en effet, les deux segments $\overline{AM}$ et $\overline{BM}$ sont opposés.

$$\overline{AM} = -\overline{BM}.$$

Il est bon d'ailleurs de s'exercer à reconnaître la position approximative d'un point lorsqu'on connaît la valeur correspondante de y.

+3 -1 $-\frac{1}{2}$ 0 $+\frac{1}{2}$

C A B D

Fig. 14.

Exemples. — Pour $y = +3$, le point M est à gauche de A dans la région AC, puisque $y > 1$ (fig. 14).

Pour $y = +\frac{1}{2}$, M est à droite de B dans la région BD; car $0 < y < 1$.

Pour $y = -\frac{1}{2}$, M est entre A et B, puisque $y < 0$.

Nous indiquerons plus loin au chapitre VII, § 2, une représentation graphique intéressante de la variation de y.

EXERCICES

SEGMENTS

25. Étant donnés n points A, B, C, D..... situés sur une même droite et dont les abscisses sont représentées en valeur absolue et en signes par a, b, c, d....., prouver que si l'on détermine sur la droite le point P dont l'abscisse est

$$p = \frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{n},$$

la mesure algébrique du segment $\overline{XP}$, X étant un point quelconque de la droite, est la moyenne arithmétique des mesures algébriques des segments $\overline{XA}$, $\overline{XB}$, $\overline{XC}$, $\overline{XD}$, ...

26. Étant donnés 3 points O, A, B en ligne droite et un point M sur AB, défini par la relation

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{q}{p},$$

démontrer que l'on a :

$$(p+q)\,\overline{OM} = p \cdot \overline{OA} + q \cdot \overline{OB},$$

$\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OM}$, $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ désignant les valeurs algébriques des segments. Vérifier dans les cas suivants :

$$\overline{OA} = 8, \quad \overline{OB} = 20, \quad p = 3, \quad q = 2;$$
$$\overline{OA} = -8, \quad \overline{OB} = 20, \quad p = 3, \quad q = 2;$$
$$\overline{OA} = -8, \quad \overline{OB} = -20, \quad p = -3, \quad q = 2.$$

27. Étant donnés 4 points A, B, C, D en ligne droite, démontrer que on a :

$$\overline{DA}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{DB}^2 \cdot \overline{CA} + \overline{DC}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0,$$

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ désignant les mesures algébriques des segments. Vérifier dans les cas suivants :

$$\overline{DA} = 100, \quad \overline{DB} = 50, \quad \overline{DC} = 20;$$
$$\overline{DA} = -100, \quad \overline{DB} = 50, \quad \overline{DC} = 20;$$
$$\overline{DA} = -100, \quad \overline{DB} = -50, \quad \overline{DC} = 20;$$
$$\overline{DA} = -100, \quad \overline{DB} = -50, \quad \overline{DC} = -20;$$
$$\overline{DA} = 50, \quad \overline{DB} = 100, \quad \overline{DC} = 20;$$
$$\overline{DA} = -50, \quad \overline{DB} = -100, \quad \overline{DC} = -20;$$
$$\overline{DA} = -20, \quad \overline{DB} = -50, \quad \overline{DC} = -100;$$
$$\overline{DA} = 20, \quad \overline{DB} = 50, \quad \overline{DC} = -100.$$

28. Les 4 points A, B, C, D étant déterminés sur une même droite par a relation

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 2\overline{BC} \cdot \overline{DA},$$

montrer que l'on a aussi la relation

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = \frac{2}{\overline{AB}},$$

et que si M est le milieu de AB, on a :

$$\overline{DM} \cdot \overline{DC} = \overline{DA} \cdot \overline{DB}.$$

29. Étant donnés 4 points O, F, P', P en ligne droite et tels qu'entre les segments $\overline{OF}$, $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$ on ait la relation

$$\frac{1}{\overline{OP}} + \frac{1}{\overline{OP'}} = \frac{1}{\overline{OF}},$$

montrer qu'on a aussi la relation

$$\overline{FP} \times \overline{FP'} = \overline{FO}^2.$$

30. On considère 4 points A, B, C, D, situés en ligne droite dans l'ordre indiqué. Démontrer que si ces 4 points sont tels que le rapport des segments $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$ est égal au rapport des segments $\overline{CB}$ et $\overline{CD}$ changé de signe, les 4 segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ jouissent de la propriété que l'inverse du plus petit est égal à la somme des inverses des trois autres.

31. Étant donnés 3 points O, A, B en ligne droite et le point I milieu du segment AB, démontrer les relations :

$$\overline{OA} + \overline{OB} = 2\,\overline{OI};$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OI}^2 - \overline{AI}^2.$$

32. Étant donnés 4 points A, B, C, D en ligne droite, tels que l'on ait :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

montrer que si l'on prend sur la droite un point quelconque O, on a la relation

$$2(\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OC} \cdot \overline{OD}) = (\overline{OA} + \overline{OB})(\overline{OC} + \overline{OD}).$$

Que devient cette formule si le point O coïncide avec le milieu I de AB ?

33. Si l'on désigne par k le rapport

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}},$$

$\overline{CA}$, $\overline{DB}$, $\overline{CB}$, $\overline{DA}$ représentant les segments déterminés sur une même droite par les 4 points A, B, C, D, trouver en fonction de k la valeur des rapports suivants :

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} \;;\quad \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}} : \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} \;;\quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} : \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \;;\quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DC}} : \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \;;\quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} : \frac{\overline{BA}}{\overline{BD}}.$$

34. Si les points C et D divisent le segment AB dans des rapports égaux en valeur absolue, O étant le milieu de AB, I le milieu de CD et M un point quelconque pris sur AB, on a :

$$\overline{MC} \cdot \overline{MD} + \overline{MA} \cdot \overline{MB} = 2\,\overline{MI} \cdot \overline{MO}.$$

35. Étant donnés deux points A et B sur une droite indéfinie, on détermine les deux points C et D de cette droite, tels que l'on ait :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n} \text{ et } \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = -\frac{m}{n}.$$

Dans quel rapport le point O, milieu de CD, divise-t-il AB ? Le point O est-il entre A et B ou en dehors de ce segment ?

MOUVEMENT UNIFORME

36. Un mobile se déplace, d'un mouvement uniforme à la vitesse de 5 mètres par seconde. Quelle est sa vitesse :

1° En centimètres par minute ;
2° En kilomètres par heure ;
3° En myriamètres par jour ?

37. Deux courriers vont à la rencontre l'un de l'autre en partant de deux villes A et B distantes de 400 kilomètres. Celui qui part de A fait 12 kilomètres à l'heure; celui qui part de B fait 8 kilomètres à l'heure et part 6 heures avant l'autre. Au bout de combien de temps se rencontreront-ils et à quelles distances des points de départ ?

38. Deux équipes de rameurs font un match sur une distance de 8 kilomètres; la première équipe donne 42 coups de rame à la minute, l'autre 38 et cette dernière parcourt la distance en 35 minutes. En supposant que les deux équipes se déplacent uniformément et que 40 coups de rame de la première soient égaux à 36 de la seconde, trouver la position de l'équipe battue à la fin de la course.

39. Un train express a une vitesse double de celle d'un train omnibus. Le premier parcourt une distance de 180 kilomètres en 2 heures de moins que le second. Trouver les vitesses des deux trains en supposant qu'ils se déplacent d'un mouvement uniforme.

40. Un bicycliste, qui part en excursion, calcule qu'en faisant 20 kilomètres à l'heure, il arriverait un quart d'heure plus tôt qu'en parcourant seulement 920 mètres en trois minutes. Quelle distance doit-il franchir?

41. Pendant la marche d'un train, on observe un bruit spécial chaque fois qu'une roue passe d'un rail au suivant. Les rails ont 12 mètres de longueur, et on a compté 135 de ces bruits en $1^m 46^s$. Quelle est la vitesse du train en kilomètres par heure?

42. Deux bicyclistes A et B partent en même temps d'une ville M et se dirigent vers une ville N. Le bicycliste A fait $17^k \frac{1}{4}$ à l'heure et B, 15 kilomètres. Le premier rencontre, à 10 kilomètres du point de départ, un ami avec lequel il revient en M où il reste avec lui 20 minutes, puis il repart et arrive en N en même temps que B qui avait pris 40 minutes de repos en route. Quelle est la distance MN et la durée du trajet?

43. Un cavalier part de A dans la direction AB en même temps que deux piétons partent de B dans des sens opposés. Le cavalier les rencontre l'un en M, l'autre en M'. On demande de calculer la distance AB, sachant que les deux piétons ont la même vitesse, que la vitesse du cavalier est m fois plus grande et que la distance MM' est égale à d.

44. Généraliser le problème précédent en supposant que les piétons s'éloignent de B avec des vitesses v et v', et que le cavalier part de A dans la direction AB avec la vitesse V; on donne $MM' = d$.

45. Trois mobiles parcourent la même route ABCX dans le même sens AX, le premier A fait 48 kilomètres à l'heure, le deuxième B fait 32 kilomètres et le troisième C, 44 kilomètres. De plus, le premier part une heure après les deux autres qui partent en même temps. Sachant que la distance AB est égale à 28 kilomètres et $BC = 58$ kilomètres, trouver le chemin parcouru par le mobile A quand il se trouvera à égale distance des deux autres, et la distance qui l'en séparera. Indiquer les positions des mobiles B et C à ce moment.

46. Deux coureurs partent d'un même point sur une piste circulaire, dont la longueur est a et tournent dans le même sens, le premier avec une vitesse constante v, le second avec la vitesse v'. Indiquer les époques où

les coureurs se rencontreront et les chemins parcourus par chacun d'eux.

47. Un voyageur qui se rend à pied de la ville A à la ville B, part à midi en faisant 70 mètres à la minute; à une certaine distance, il monte dans un tramway, qui part de A à midi 20 minutes, pour aller également à B en faisant 150 mètres par minute; le voyageur arrive 24 minutes plus tôt que s'il avait continué à marcher à pied.

On demande : 1° A quelle distance de A il est monté en tramway; 2° quelle est la distance de A à B.

48. Deux bicyclistes A et B partent d'un même point, le second parcourant 3 kilomètres à l'heure de plus que le premier. Deux heures après le départ, le cycliste A augmente sa vitesse de 1 kilomètre à l'heure, pendant que B est obligé, par suite d'un accident, de s'arrêter pendant 3/4 d'heure. La rencontre se fait 6^h 1/2 après le départ. En supposant que les deux cyclistes se soient déplacés d'un mouvement uniforme dans les intervalles de temps considérés, on demande leurs vitesses respectives et la distance du point de rencontre au point de départ.

49. Dans une course, A court à une allure de 275 mètres à la minute; B poursuit A à une vitesse de 250 mètres à la minute, pendant la première moitié de la course et à la vitesse de 285 mètres pendant la seconde. Qui gagne? et quelle est la longueur de la course si le gagnant arrive 15 secondes avant l'autre?

50. Une personne marche à une allure régulière, et après avoir parcouru la moitié du trajet qu'elle doit faire, elle accélère le pas de façon que sa vitesse nouvelle soit avec l'ancienne dans le rapport de 3 à 2. Elle arrive à destination 40 minutes plus tôt que si elle avait toujours marché à la première allure. Pendant combien de temps a-t-elle marché à chaque allure?

51. Deux courriers partent des points A et B distants de 105 kilomètres; en allant à la rencontre l'un de l'autre, ils se rencontrent au bout de 6 heures; s'ils avaient marché dans le même sens, ils se seraient rencontrés au bout de 39 heures. Trouver la vitesse de chacun en supposant que les mouvements soient uniformes.

52. Deux mobiles partent au même instant des deux points A et B situés sur deux droites rectangulaires AX et BY qui se coupent en O. Ils se dirigent tous deux vers O, qu'ils peuvent dépasser, d'un mouvement uniforme dont la vitesse est v pour le premier, et v' pour le second. On donne $OA = a$ et $OB = b$ et on demande : 1° L'expression de la distance des deux mobiles au temps t; 2° la condition pour que les mobiles se rencontrent en O.

53. Un train parti à 8^h30^m du matin d'une des extrémités d'un chemin de fer de 471 kilomètres, doit mettre 6^h40^m pour atteindre l'autre extrémité. On veut qu'un autre train parti à 9^h40 rejoigne le premier à 356 kilomètres du point de départ. Quelle doit être la vitesse moyenne de ce second convoi?

54. Deux trains partent en même temps de deux villes, et vont à la rencontre l'un de l'autre d'un mouvement supposé uniforme. Quand ils se croisent, l'un d'eux a parcouru 162 kilomètres de plus que l'autre. Continuant leur marche, ils atteignent chacun le point de départ de l'autre, le premier au bout de 9 heures, le second au bout de 16 heures après leur départ. Trouver la distance des deux villes et les vitesses des trains.

55. On considère deux points A et B situés sur les côtés d'un angle droit AOB, à des distances du sommet respectivement égales à a et b. Un mobile partant de A se meut sur le côté OA, en s'éloignant du sommet avec une vitesse constante v. Un second mobile partant au même instant de B est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, et sa trajectoire rencontre OA en un point M tel que l'angle $OBM = 30^0$. On demande quelle doit être sa vitesse pour que les deux mobiles se rencontrent en M.

56. Un nageur descendant le courant d'une rivière a parcouru 1500 mètres en 15 minutes; sans l'aide du courant il lui aurait fallu 20 minutes. Quelle était la vitesse du courant par heure, et combien faudrait-il de temps au nageur pour parcourir la même distance en remontant le courant?

57. Un observateur voulant calculer la distance qui le sépare du point d'explosion d'une torpille sous-marine, compte 10 secondes entre l'instant où il entend le bruit de l'explosion transmis par l'eau, et celui où il entend le bruit de l'explosion transmis par l'air. Dans les conditions où l'on se trouve, la vitesse du son par seconde est, dans l'air, de 340 mètres et, dans l'eau, de 1430 mètres. Déterminer la distance de l'observateur au point où se trouvait la torpille à son explosion.

CHAPITRE III

PRINCIPES DU CALCUL ALGÉBRIQUE

§ 1. — Expressions algébriques

111. — Définition. — Nous avons défini dans les chapitres précédents les opérations algébriques fondamentales que l'on peut effectuer sur les nombres algébriques. Ceci posé, rappelons une définition déjà donnée au n° **63** :

On appelle **expression algébrique** *le résultat de une ou plusieurs opérations algébriques non encore effectuées et représentées par les signes conventionnels déjà définis.*

Dans une expression algébrique peuvent figurer les éléments suivants : 1° des nombres algébriques ayant des valeurs numériques *déterminées*; 2° des nombres algébriques *indéterminés* et représentés par des lettres.

Rappelons aussi que (n° **64**) :

On appelle **valeur numérique** *d'une expression algébrique, pour certaines valeurs attribuées aux lettres qui y figurent, le nombre que l'on obtient en remplaçant les lettres par les nombres et en effectuant les calculs indiqués.*

112. — Classification. — On dit qu'une expression est *rationnelle* lorsqu'elle ne contient l'indication d'aucune extraction de racine *portant sur une partie littérale*. Elle est *irrationnelle* dans le cas contraire.

Ainsi
$$\frac{3a^2bc}{d} + \sqrt[3]{2}\,ab + \frac{2c - \sqrt{3}\,d}{4}$$

est une expression rationnelle, car aucune lettre ne figure sous un radical. Au contraire

$$\sqrt[3]{a^2 - b^2} + 4a + \sqrt{a^3 + b^3}$$

est une expression irrationnelle.

Comme on n'a défini la racine carrée ou cubique d'un nombre que pour les nombres arithmétiques ou positifs, nous supposerons essentiellement que dans toute expression irrationnelle les quantités placées sous les radicaux ont été choisies positives. Du reste, nous rencontrerons rarement des expressions irrationnelles.

113. — Monômes. — *On appelle* **monôme** *le produit de plusieurs nombres algébriques.*

Ainsi l'expression

$$(-5)\cdot a\cdot(-3)\cdot a\cdot 4\cdot b\cdot a\cdot 2\cdot b$$

est un monôme.

Il faut remarquer d'ailleurs que dans un monôme les facteurs peuvent être *fractionnaires*.

Ainsi l'expression

$$-\frac{5a^2bc}{3d}$$

est un monôme, car on peut la considérer comme le produit des cinq facteurs

$$-\frac{5}{3},\quad a^2,\quad b,\quad c,\quad \frac{1}{d}.$$

Un monôme qui ne contient pas de facteur littéral fractionnaire est dit **entier**.

114. — Coefficient d'un monôme. — Comme dans un produit de facteurs on peut changer l'ordre des facteurs, on peut écrire dans le monôme

$$(-5)\cdot a\cdot(-3)\cdot a\cdot 4\cdot b\cdot a\cdot 2\cdot b$$

d'abord les facteurs numériques et grouper ensemble les facteurs égaux. L'expression devient

$$(-5)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 2\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b.$$

D'autre part, on peut, dans un produit de facteurs, remplacer plusieurs facteurs par leur produit effectué, l'expression précédente prend alors la forme suivante :

$$120\, a^3 b^2.$$

Lorsqu'un monôme entier a été mis sous une forme *réduite* analogue aux suivantes :

$$120\,a^3 b^2, \quad -5\,a^2 b^4 c^3, \quad -\frac{5}{3} a^2 bc, \quad \sqrt{2}\,bc,$$

on appelle *coefficient* du monôme le nombre obtenu en négligeant la partie littérale. Les coefficients des monômes précédents sont respectivement

$$120, \qquad -5, \qquad -\frac{5}{3}, \qquad \sqrt{2}.$$

D'où la règle suivante :

Pour simplifier un monôme, on réunit ensemble tous les facteurs numériques en tête du monôme. On en fait le produit qui est appelé* coefficient *du monôme. On groupe de même ensemble les puissances d'une même lettre qu'on remplace par leur produit qui est une puissance de cette même lettre.

115. — Remarque. — Lorsqu'un monôme a la forme

$$-a^2 bc^3,$$

il faut, pour appliquer la définition précédente, le mettre sous la forme

$$(-1) \,.\, a^2 bc^3.$$

On voit alors que le coefficient est égal à (-1). De même le coefficient du monôme

$$a^2 b^2 c^3$$

est égal à $(+1)$.

116. — **Degré d'un monôme.** — ***On appelle* degré *d'un monôme entier, par rapport à une des lettres qui y figurent, l'exposant de cette lettre dans la forme* réduite *du monôme.***

Ainsi

$$-5a^2 b^2 c^3$$

est du second degré par rapport à l'une des lettres *a* ou *b* et du troisième degré par rapport à *c*.

On appelle degré d'un monôme entier par rapport à plusieurs des lettres qui y entrent la somme des degrés par rapport à chacune de ces lettres.

Ainsi	$-5a^2b^2c^3$	est du 2ᵉ	degré	par rapport à	a.
—	—	4ᵉ	—	—	a et b.
—	—	7ᵉ	—	—	a, b, c.

117. — Polynôme. — *On appelle* **polynôme** *la somme de plusieurs monômes.*

Ainsi

$$ab^3 - 3abc + 7ab^2c^3$$

est un polynôme, car il est la somme des trois monômes :

$$ab^3, \quad -3abc, \quad +7ab^2c^3.$$

Les monômes qui composent le polynôme sont appelés les *termes* du polynôme.

Un polynôme qui n'a que deux termes est un *binôme*; s'il a trois termes, c'est un *trinôme*.

Un polynôme est dit *entier* si tous les monômes qui le composent sont entiers.

118. — Termes semblables. — *On appelle* **termes semblables** *dans un polynôme entier des termes qui ne diffèrent que par les coefficients.*

Deux termes semblables ont donc même partie littérale.

Ainsi dans le polynôme entier :

$$4ax^3 - 2a^3x + \frac{3}{2}ax^3 - x^4 - 5ax^3,$$

les termes :

$$4ax^3, \qquad +\frac{3}{2}ax^3, \qquad -5ax^3$$

sont *semblables*.

119. — Réduction des termes semblables. — On sait (nº **32**) que dans une somme de nombres algébriques on peut remplacer plusieurs termes par leur somme effectuée ; donc on peut, dans le polynôme précédent, remplacer les trois termes semblables par (nº **48**) :

$$\left(4 + \frac{3}{2} - 5\right) ax^3,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} ax^3$$

le polynôme se réduit alors à

$$\frac{1}{2} a x^3 - 2 a^3 x - x^4.$$

L'opération que nous venons de faire est ce que l'on appelle une *réduction de termes semblables*.

Remarquons que dans le polynôme réduit, le coefficient $\left(\frac{1}{2}\right)$ est précisément la somme des coefficients des termes semblables.

$$\frac{1}{2} = 4 + \left(+\frac{3}{2}\right) + (-5).$$

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

Règle. — ***Lorsque dans un polynôme entier il y a plusieurs termes semblables, on peut remplacer tous ces termes par un seul qui leur est semblable et qui a pour coefficient la somme des coefficients de ces termes.***

120. — Polynômes ordonnés. — Il résulte immédiatement de la définition d'un polynôme que l'on peut écrire ses termes dans un ordre arbitraire. Il y a souvent avantage à choisir cet ordre d'une manière particulière.

Considérons d'abord un polynôme qui ne contienne qu'une seule lettre. Il convient alors, après la réduction des termes semblables, d'écrire ces termes de façon que leurs degrés aillent en croissant ou bien en décroissant. On dit alors que le polynôme est *ordonné*.

Ainsi le polynôme

$$4 + x + x^3 - 5x^4$$

est *ordonné suivant les puissances croissantes de x.*

Rappelons encore que les termes sont

$$4, \qquad +x, \qquad +x^3, \qquad -5x^4$$

et que les coefficients sont respectivement

$$4, \qquad +1, \qquad +1, \qquad -5.$$

Le même polynôme *ordonné suivant les puissances décroissantes de x* est

$$-5x^4 + x^3 + x + 4.$$

Considérons maintenant un polynôme contenant deux lettres a et x. On *ordonne* alors les termes suivant les puissances de l'une des deux lettres. Supposons, par exemple, que le polynôme, après la réduction des termes semblables, se réduise à

$$ax^3 + x^4 - x^3 + 2ax^2 + 4x - 3x^2 + 1.$$

On peut l'écrire d'abord

$$x^4 + ax^3 - x^3 + 2ax^2 - 3x^2 + 4x + 1.$$

Remarquons maintenant que (n° **48**)

$$ax^3 - x^3 = (a - 1)x^3,$$
$$2ax^2 - 3x^2 = (2a - 3)x^2,$$

le polynôme peut donc prendre la forme

$$x^4 + (a - 1)x^3 + (2a - 3)x^2 + 4x + 1.$$

On dit alors que le polynôme est *ordonné suivant les puissances décroissantes de x* et, par une extension du mot coefficient, on dit aussi que le polynôme a pour coefficients

$$1, \quad (a - 1), \quad (2a - 3), \quad 4, \quad 1.$$

121. — Degré d'un polynôme. — ***On appelle* degré *d'un polynôme entier ordonné suivant les puissances de la lettre* x *l'exposant de la plus haute puissance de* x.**

Ainsi le polynôme que nous venons de considérer est du quatrième degré (par rapport à x). Considérons encore l'exemple suivant :

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Ce polynôme est ordonné suivant les puissances décroissantes de a et suivant les puissances croissantes de b. Il est du troisième degré par rapport à chacune des deux lettres a et b.

On remarquera que le degré de chaque terme par rapport à l'ensemble des deux lettres a et b est (n° **116**) aussi

égal à trois. Le polynôme est dit *homogène* par rapport aux deux lettres a et b.

122. — Polynômes complets. — On dit qu'un polynôme en x est *complet* lorsqu'il contient des termes de tous les degrés, depuis le degré le plus élevé jusqu'au terme constant qu'on peut considérer comme de degré zéro, puisque (n° **62**) $x^0 = 1$.

Un polynôme qui n'est pas complet est dit *incomplet*.

Ainsi le polynôme du 4[e] degré :

$$x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x + 5$$

est *complet*. Le dernier terme 5 est ce qu'on appelle le *terme constant*. On peut le considérer comme contenant la lettre x à l'exposant *zéro*, car (n° **62**)

$$5x^0 = 5 \cdot 1 = 5.$$

Le polynôme :

$$x^3 + 2x$$

est *incomplet*. Il y manque le terme du second degré et un terme constant.

§ 2. — Addition et soustraction des monômes et polynômes.

123. — Addition et soustraction des monômes. — L'addition des monômes a déjà été effectuée dans le chapitre précédent (n° **117**), mais, pour grouper ensemble toutes les opérations sur les monômes et polynômes, nous rappellerons ici la règle :

Règle. — ***Pour additionner plusieurs monômes, il suffit d'écrire tous ces monômes à la suite les uns des autres avec leurs signes.***

La soustraction d'un monôme équivaut à l'addition du monôme opposé.

124. — Addition et soustraction des polynômes. — ***Pour ajouter ou retrancher un polynôme, il suffit d'ajouter ou de retrancher successivement tous les termes de ce polynôme.***

Ceci résulte du théorème du n° **39**.

On voit donc que, pour additionner deux polynômes, il suffit d'écrire tous les termes de l'un des polynômes à la suite de l'autre.

Ainsi, soit à additionner les deux polynômes

$$x^4 - x^2 + x + 1, \qquad x^3 + x^2 - 2x + 3,$$

la somme est représentée par

$$(x^4 - x^2 + x + 1) + (x^3 + x^2 - 2x + 3);$$

l'application de la règle donne

$$x^4 - x^2 + x + 1 + x^3 + x^2 - 2x + 3$$

et, après la réduction des termes semblables,

$$x^4 + x^3 - x + 4.$$

Ce polynôme est la somme cherchée.

Supposons maintenant qu'on veuille retrancher du polynôme $(x^2 - 3x + 1)$, le polynôme $(x^3 + 6x - 7)$, c'est-à-dire calculer la différence

$$(x^2 - 3x + 1) - (x^3 + 6x - 7).$$

D'après la règle précédente et la règle de soustraction des monômes, il suffit d'additionner au premier polynôme les trois monômes

$$-x^3, \qquad -6x, \qquad 7,$$

ce qui donne :

$$x^2 - 3x + 1 - x^3 - 6x + 7,$$

ou bien

$$-x^3 + x^2 - 9x + 8.$$

C'est le résultat cherché.

125. — **Règle pratique.** — D'une manière générale, pour faire la somme de plusieurs polynômes, il suffit d'écrire tous les termes de ces polynômes à la suite les uns des autres. On pourra, ensuite, faire la réduction des termes semblables.

Dans la pratique, on dispose l'opération de façon que la réduction des termes semblables soit facile.

Les polynômes à ajouter étant réduits, on les ordonne tous, dans le même sens, par rapport à une même lettre. Puis on les écrit les uns au-dessous des autres de façon que les termes semblables soient tous dans une même colonne verticale, et on fait l'addition en faisant la somme des termes de chaque colonne verticale.

Lorsque les polynômes sur lesquels on opère ne sont pas *complets*, on a soin d'espacer les termes de façon à marquer la place des termes qui manquent dans un polynôme et qui peuvent exister dans un autre.

EXEMPLES. — Soit à faire la somme des polynômes :

$$x + x^2 - 1 \qquad x^3 - x + 4x^2 - 3 \qquad x - 4.$$

On les ordonne et on les dispose les uns au-dessous des autres. On a ainsi l'opération suivante :

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 1 \\ x^3 + 4x^2 - x - 3 \\ x - 4 \\ \hline x^3 + 5x^2 + x - 8. \end{array}$$

Soit encore à faire la somme des polynômes

$$\begin{array}{l} x^4 + 2x^2y^2 - 3x^3y + y^4 \\ x^4 - y^4 \\ 6x^3y - 5xy^3 \\ 4x^2y^2 + 2y^4. \end{array}$$

Nous disposerons l'opération de la façon suivante, en laissant dans le premier polynôme la place du terme en x qui manque, dans le second polynôme les trois places des termes en x^3, x^2, x, qui manquent, etc....

$$\begin{array}{lllll} x^4 & - 3x^3y & + 2x^2y^2 & & + y^4 \\ x^4 & & & & - y^4 \\ & 6x^3y & & - 5xy^3 & \\ & & -4x^2y^2 & & + 2y^4 \\ \hline 2x^4 & + 3x^3y & + 6x^2y^2 & - 5xy^3 & + 2y^4. \end{array}$$

§ 3. — Multiplication des monômes et des polynômes. — Division d'un polynôme par un monôme.

126. — **Multiplication des monômes**. — Les règles démontrées pour les produits de facteurs (nos 43 et 44) fournissent immédiatement la règle suivante :

Règle. — *Pour faire le produit de deux monômes, il suffit de faire le produit de tous les facteurs qu'ils contiennent.*

Il résulte de là que :

Le coefficient du produit de deux monômes entiers est le produit des coefficients des deux monômes.

Soit par exemple à faire le produit des monômes entiers :

$$4x^3y^3z \qquad 3x^2yt.$$

Ce produit est

$$4x^3y^3z\,3x^2yt.$$

Si on fait la réduction de ce monôme (n° 114) on trouve successivement

$$12x^3x^2y^3yzt$$

et

$$12x^5y^4zt.$$

C'est le résultat cherché.

127. — **Multiplication d'un polynôme par un monôme**. — La règle pour faire le produit d'une somme algébrique par un nombre (n° 48) nous conduit à la règle suivante :

Règle. — *Pour faire le produit d'un polynôme par un monôme, on fait la somme des produits obtenus en multipliant successivement chacun des termes du polynôme par le monôme.*

Exemples. — Soit à effectuer ce produit

$$(x^4 - x^2 + 2x + 7)\,2x^2.$$

Ce produit est égal à

$$2x^6 - 2x^4 + 4x^3 + 14x^2.$$

De même on a :

$$(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)\,ab = a^5b - 2a^3b^3 + ab^5.$$

128. — Produit de deux polynômes. — Pour faire le produit de deux polynômes, il suffit d'appliquer la règle par laquelle on obtient le produit de deux sommes algébriques (n° **49**).

Pour multiplier entre eux deux polynômes, il suffit de multiplier l'un d'eux successivement par tous les termes de l'autre et d'ajouter entre eux les résultats obtenus.

Pratiquement, pour multiplier deux polynômes entiers, on dispose en général l'opération de la façon suivante :

Règle. — ***On ordonne les deux polynômes, dans le même sens, par rapport à la même lettre. On écrit l'un des polynômes (multiplicateur) au-dessous de l'autre (multiplicande) et on multiplie successivement le multiplicande par tous les termes du multiplicateur. On écrit les produits partiels, ainsi obtenus, les uns au-dessous des autres de façon à disposer leur addition, comme il a été dit au n° 125 et on effectue cette addition.***

Exemple I. — Soit à faire le produit des deux polynômes

$$4x - x^2 + 2x^3 - 3 \quad \text{et} \quad x^2 + 15 - x.$$

Disposition de l'opération :

$$\begin{array}{l|rrrrrr}
\textit{Multiplicande} & 2x^5 & -\ x^4 & +\ 4x^3 & -\ 3x^2 & & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrrrrrr}
\textit{Multiplicande} & 2x^3 & -\ x^2 & +\ 4x & -\ 3 & & \\
\textit{Multiplicateur} & & x^2 & -\ x & +\ 15 & & \\
\hline
 & 2x^5 & -\ x^4 & +\ 4x^3 & -\ 3x^2 & & \\
\textit{Produits partiels} & & -\ 2x^4 & +\ x^3 & -\ 4x^2 & +\ 3x & \\
 & & & 30x^3 & -\ 15x^2 & +\ 60x & -\ 45 \\
\hline
\textit{Produit} & 2x^5 & -\ 3x^4 & +\ 35x^3 & -\ 22x^2 & +\ 63x & -\ 45.
\end{array}$$

Exemple II. — Soit à faire le produit des deux polynômes

$$x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \qquad \text{et} \qquad x - a.$$

Disposition de l'opération :

$$\begin{array}{lrrrrr}
\textit{Multiplicande} & x^3 & +\ ax^2 & +\ a^2x & +\ a^3 & \\
\textit{Multiplicateur} & & & x & -\ a & \\
\hline
 & x^4 & +\ ax^3 & +\ a^2x^2 & +\ a^3x & \\
 & & -\ ax^3 & -\ a^2x^2 & -\ a^3x & +\ a^4 \\
\hline
\textit{Produit} & x^4 & & & & -\ a^4.
\end{array}$$

On obtient donc la formule suivante :

$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3).$$

129. — Identités. — ***On dit que deux expressions algébriques sont équivalentes lorsqu'elles prennent les mêmes valeurs numériques, quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres qui y figurent.***

Ainsi les expressions

$$a(b+c) \quad \text{et} \quad ab + ac$$

sont équivalentes.

Lorsqu'on écrit une égalité dont les deux membres sont des expressions équivalentes, on a ce qu'on appelle une *identité*.

Ainsi les égalités :

$$a(b+c) = ab + ac,$$
$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

sont des identités.

130. — Identités remarquables. — Chaque fois qu'on fait le produit de deux ou de plusieurs polynômes, on obtient des expressions équivalentes, et, par suite, on peut écrire des identités.

Parmi ces identités, il y en a de remarquables qu'il est bon de savoir par cœur.

Voici d'abord celles, *très importantes*, qui ont été démontrées aux nos **49**, **50** et **51**.

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2,$$
$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2,$$
$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2.$$

En appliquant la règle de multiplication des polynômes, on trouve encore les suivantes :

$$(x^2 + ax + a^2)(x - a) = x^3 - a^3,$$
$$(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)(x - a) = x^4 - a^4,$$
$$(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)(x - a) = x^5 - a^5,$$

etc...

$$(x^2 - ax + a^2)(x + a) = x^3 + a^3,$$
$$(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)(x + a) = x^5 + a^5.$$

On les vérifiera sans peine.

Plus généralement on a l'identité :

$$x^m - a^m = (x - a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}),$$

où m désigne un nombre entier arbitraire.

Pour bien comprendre le sens de cette identité, il faut d'abord savoir ce que signifie l'expression

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}$$

qui figure dans la dernière parenthèse.

Lorsqu'on veut écrire un polynôme de degré m, où le nombre entier m reste indéterminé, on ne peut évidemment pas écrire *tous* les termes puisqu'on n'en connaît pas le nombre. Mais si les termes successifs du polynôme, supposé ordonné, se déduisent les uns des autres par une loi régulière, il suffit, pour indiquer d'une façon précise le polynôme entier, d'écrire quelques-uns des premiers termes, pour faire deviner la loi de succession, et le dernier, et d'indiquer par des points les termes non écrits.

Ainsi le polynôme précédent est celui dont les termes successifs sont x^{m-1}, ax^{m-2}, a^2x^{m-3}, a^3x^{m-4}, etc., de telle sorte que, lorsqu'on passe d'un terme au suivant, l'exposant de a augmente d'une unité et l'exposant de x diminue d'une unité. Dans le premier terme l'exposant de a est *zéro* et celui de x est $m - 1$; dans le dernier, l'exposant de a est $m - 1$ et celui de x est *zéro*.

Lorsqu'on craint que le lecteur ne devine pas la loi de formation des termes successifs par la simple comparaison des deux ou trois premiers, on écrit encore ce qu'on appelle le *terme général*, qui est un terme quelconque, de rang $p + 1$ par exemple, et duquel on déduit tous les autres en donnant à p les valeurs 0, 1, 2, etc. Ainsi, dans

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^px^{m-p-1} + \ldots + a^{m-1},$$

le *terme général* est a^px^{m-p-1}, qui est de rang $p + 1$.

Pour vérifier l'identité annoncée, il suffit de faire la multiplication suivante :

$$\begin{array}{l} x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{p-1}x^{m-p}+a^px^{m-p-1}+\ldots+a^{m-1} \\ x-a \\ \hline x^m+ax^{m-1}+a^2x^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+a^px^{m-p}+\ldots\ldots \\ \quad -ax^{m-1}-a^2x^{m-2}\ldots\ldots\ldots-a^px^{m-p}\ldots\ -a^m \\ \hline x^m+0 \quad +0 \quad \ldots\ldots\ldots+0 \quad +\ldots -a^m \end{array}$$

Tous les termes se détruisent deux à deux sauf le premier et le dernier. Le terme $+a^px^{m-p}$, qui provient de la multiplication de a^px^{m-p-1} par x, se détruit avec le terme $-a^px^{m-p}$ qui provient de la multiplication de $a^{p-1}x^{m-p}$ par $-a$.

En remplaçant, dans l'identité, a par $-a$, elle doit évidemment subsister. Il se présente alors deux cas :

1° *Si* m *est pair*, on a : $(-a)^m=a^m$ et $(-a)^{m-1}=-a^{m-1}$, et l'identité devient :

$$x^m-a^m=(x+a)(x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots-a^{m-1}).$$

les signes $+$ et $-$ alternant dans la parenthèse.

2° *Si* m *est impair*, on a : $(-a)^m=-a^m$ et $(-a)^{m-1}=a^{m-1}$, et l'identité devient :

$$x^m+a^m=(x+a)(x^{m-1}-ax^{m-2}+a^2x^{m-3}-\ldots+a^{m-1}),$$

les signes $+$ et $-$ alternant dans la parenthèse.

On peut d'ailleurs vérifier directement ces identités.

Remarque. — On dit qu'un polynôme P est *divisible* par un polynôme R s'il existe un troisième polynôme Q (appelé *quotient*) tel que le produit de R par Q soit *identique* au polynôme P.

Ce qui précède prouve que x^m-a^m est toujours *divisible* par $x-a$ et que le *quotient* est

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+\ldots+a^{m-1}.$$

Mais x^m-a^m n'est divisible par $x+a$ que lorsque m est *pair*; et x^m+a^m est divisible par $x+a$ lorsque m est *impair*.

131. — Division d'un monôme par un monôme.

Le quotient d'un monôme (dividende) par un autre monôme (diviseur) est équivalent à une fraction ayant pour numérateur le monôme dividende et pour dénominateur le monôme diviseur.

Le quotient de deux monômes entiers *n'est pas, en général, un monôme entier*; mais, si les deux monômes contiennent des lettres communes, on pourra simplifier la fraction obtenue en divisant les deux termes par des lettres communes.

Ainsi le quotient de $4a^3bc^2$ par $\frac{2}{3}ab^2d$ est :

$$\frac{12a^3bc^2}{2ab^2d},$$

fraction qui peut se simplifier et s'écrire

$$\frac{6a^2c^2}{bd}.$$

132. — Il peut arriver, en particulier, qu'après la simplification il n'y ait plus aucune lettre en dénominateur. Dans ce cas, le quotient est un monôme *entier*. Ainsi

$$\frac{4a^3b^4c^2}{3ab^2c}=\frac{4}{3}a^2b^2c.$$

Il est d'ailleurs facile de voir *que la condition nécessaire et suffisante pour que le quotient de deux monômes entiers soit équivalent à un monôme entier est que le dividende contienne toutes les lettres qui figurent dans le diviseur, chacune d'elles étant affectée d'un exposant au moins égal à celui qu'elle a dans le diviseur.*

La démonstration est la même que celle que l'on fait en arithmétique pour trouver la condition pour qu'un nombre entier décomposé en facteurs premiers soit divisible par un autre nombre également décomposé [1].

1. Voir dans notre *Cours abrégé d'arithmétique* n° 306, page 121.

133. — Division d'un polynôme par un monôme. — Pour diviser un polynôme par un monôme, il suffit de multiplier le polynôme par l'inverse du monôme. En appliquant le théorème du n° **48**, on parvient immédiatement à la règle suivante :

Règle. — ***Pour diviser un polynôme par un monôme, il suffit de diviser chacun des termes du polynôme par le monôme.***

Ainsi

$$\frac{4x^4 - 2ax^3 + 3a^2x^2 + a^4}{5ax^2} = \frac{4}{5}\cdot\frac{x^2}{a} - \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}a + \frac{1}{5}\frac{a^3}{x^2}.$$

De même

$$\frac{\frac{2}{3}a^2x^3 - 5a^3x^2 + 2a^4x}{6a^2x} = \frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{6}ax + \frac{1}{3}a^2.$$

Dans le second exemple, le dividende, le diviseur et le quotient sont *entiers*.

EXERCICES

ADDITIONS DE POLYNÔMES

58. Additionner les polynômes :

$$-7x^3 + 5x^2y - 8xyz + 2xz^2; \quad -7y^3 + 5y^2z + 4xyz - x^2z;$$
$$-3x^2y + 2x^2z - 6xyz + 11xz^2;$$
$$x^3 - x^2y + x^2z - xyz + xy^2 - xz^2 + yz^2.$$

59. Effectuer les opérations suivantes :

$$5x - [3x - (2x+3)]; \quad 4x - 5 - (3x - 4) + [2x - 3 - (2x - 7x + 5)];$$
$$3x - \Big[y - \{x + (y - 3x)\}\Big];$$
$$5a - 7(b - c) - [6a - (3b + 2c) + 4c - (2a - b - 2c) - a].$$

MULTIPLICATIONS DE POLYNÔMES

60. Effectuer les multiplications suivantes :

$$(2x^2 - 3y^2 - xy) \times (5x^2 - 2xy);$$
$$(6x^5 - 4x^4 - 19x^3 + 23x^2 - 13x + 3) \times (3x^2 - 2x + 1);$$
$$(2x^3 - 5x^2 + 4x - 1)(3x^2 - x + 2);$$
$$(3x^2 + 2xy - y^2)(2x^2 - 3xy + y^2).$$

61. Effectuer les opérations suivantes :

$$[2x+y-(x+2y)]\times[3x-2y-(2x-3y)];$$
$$(2a-x)(2b-y)+(a+2x)(b+2y)-5(ab+xy);$$
$$[3x^2-2x(x-y)-y(x+y)]\cdot(2x^2-3xy+y^2);$$
$$a(b+c)(b^2+c^2-a^2)+b(c+a)(c^2+a^2-b^2)+c(a+b)(a^2+b^2-c^2)$$
$$-2abc(a+b+c).$$

62. Effectuer :

$$(a^{3m}+a^{2m}b^p+a^m b^{2p}+b^{3p})\cdot(a^m-b^p);$$
$$(x^{2r}-x^r y^s+y^{2s})\cdot(x^{2r}+x^r y^s+y^{2s});$$
$$[x^{p(q-1)}+y^{q(p-1)}]\cdot[x^{p(q-1)}-y^{q(p-1)}];$$
$$[x^{2p}-(a+b)x^p+ab]\cdot(x^p-c);$$
$$[a^m-ba^{m-1}x+ca^{m-2}x^2]\cdot(a^n+ba^{n-1}x-ca^{n-2}x^2).$$

63. Effectuer :

$$\frac{11\,abc}{13pqr}\cdot\left(\frac{3}{4}\frac{pr}{ac}+\frac{3}{7}bq-\frac{5}{6}\frac{qr}{bc}\right);\qquad \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{c}-\frac{2}{a+b}\cdot\left(\frac{a+b}{7c}-a-b\right);$$
$$1-\frac{a+b}{a-b}\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a-b}{a}+\frac{a-b}{a+b}\right).$$

64. Si l'on pose :

$$X=a^2-bc;\qquad Y=b^2-ac;\qquad Z=c^2-ab,$$

montrer que l'on a identiquement :

$$aX+bY+cZ=(X+Y+Z)(a+b+c).$$

65. Effectuer les produits suivants :

$$(x^5+ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x+a^5)\cdot(x-a);$$
$$(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5)\cdot(x+a);$$
$$(4a^2x^4+6a^3x^3+9a^4x^2)(2ax^2-3a^2x).$$

66. Trouver la somme :

$$\frac{4ab+2b^2-12a^2}{3(a^2-b^2)}+\frac{2a-b}{a-b}+\frac{7a}{3(a+b)}+2.$$

67. Effectuer :

$$\frac{(a+b)^2}{a^3-b^3}-\frac{a-b}{a^2+ab+b^2}-\frac{4ab}{a^3-b^3}.$$

68. Simplifier l'expression :

$$p(p-a)+(p-b)(p-c),\qquad \text{pour}\qquad p=\frac{a+b+c}{2}.$$

69. Simplifier l'expression :

$$bc(p-a)+ca(p-b)+ab(p-c)-p^3-(p-a)(p-b)(p-c),$$

pour $$p=\frac{a+b+c}{2}.$$

70 Simplifier :

$$8(x-1)^3+4(x-1)^2+(x^2-4x+2)^2-(x^4-x^2+1).$$

71. Si l'on pose $2p = a + b + c$, montrer que l'on a :

$$a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2}.$$

DIVISIONS PAR UN MONÔME

72. Effectuer les divisions suivantes :

$$36a^4b^2c^3d : 3a^2bc^3; \qquad -125a^8bc^6d^4 : 5a^3c^5d;$$
$$-180a^mb^nc^{p-1}d : 60a^2b^3c; \qquad 54a^{m+2}b^{n-1}c^n : (-a^mb^{n-2}c^{n-1});$$
$$(-24a^4x + 40a^3x^2 + 56ax^4 - 72a^2x^3) : (-8ax);$$
$$\left(25a^2b^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{4}{5}a^2b - 7ab^2\right) : (-8ab).$$

RÉCAPITULATION

73. Prouver que l'on a :

$$\frac{3a - b}{a + b + \dfrac{a - b}{1 + \dfrac{a - b}{a + b}}} = \frac{2a}{a + b}.$$

74. Si $z = 1 + \dfrac{b - a}{x + a}$, simplifier l'expression

$$\frac{\dfrac{1}{(x+a)^2}\left(z - 1\right)^{m+n-2}}{z^n(b-a)^{m+n-2}}.$$

75. Réduire au même dénominateur les expressions :

$$a - \frac{1}{1 + \dfrac{1}{a}}; \qquad \frac{a^2}{a+1}; \qquad \frac{a^2 + 2ab}{a + b}; \qquad a + \frac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}.$$

76. Effectuer les opérations indiquées :

$$m - 1 + \frac{m^2 - 1}{m + 1}; \qquad x - y + \frac{y^2}{x + y}; \qquad a - \frac{a^2}{a + 1} + \frac{a}{a - 1};$$
$$\frac{2y - x}{x - y} + \frac{3x(x - y)}{x^2 - y^2} + \frac{y - 2x}{x + y};$$
$$\left(1 + a + \frac{3 + a^2}{1 - a}\right)\cdot(1 - a^2);$$
$$\frac{a^2 - (m + n)a + mn}{a^2 - (m + p)a + mp}\cdot\frac{p^2 - a^2}{n^2 - a^2}.$$

77. Effectuer les opérations et simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{8a^3}{a^3-b^3} : \frac{4a^2}{a^2+ab+b^2}; \qquad \frac{\frac{a+b}{a-b} : \frac{a^2-b^2}{a+b}}{2(a-b)};$$

$$\left[\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right]\left[\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right]\cdot\frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}};$$

$$\left(\frac{a}{b^2}+1\right)\left(\frac{a}{b^2}-1\right)\left(\frac{a^2}{b^4}+1\right) : \left(1+\frac{a}{b^2}+\frac{a^2}{b^4}+\frac{a^3}{b^6}\right).$$

78. Effectuer :

$$\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{a}{b}-\frac{29}{6}\cdot\frac{b}{a}\right)\left(\frac{71}{9}\frac{b}{a}-\frac{131}{12}\frac{a}{b}\right)-\left(\frac{7}{9}\frac{a}{b}+\frac{5}{12}\frac{b}{a}\right)\left(\frac{7}{9}\frac{a}{b}-\frac{5}{12}\frac{b}{a}\right);$$

$$\left(\frac{ab}{3c^2}-\frac{3bc}{5a^2}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}\frac{ac}{b^2}-\frac{7}{9}\frac{ab}{c^2}\right)\cdot\left(\frac{3bc}{5a^2}-\frac{ab}{3c^2}\right).$$

79. Effectuer et simplifier :

$$\frac{22abc}{39pqr} : \frac{11ab}{3pr}; \qquad \frac{7a^2b^3c}{39m^2n^5p} : \frac{35m^7n^4p^3}{9a^4b^5c^2}; \qquad \frac{169x^2y^2p^2}{531m^4n^5q^6} : \frac{13xy^2p}{9mn^5q};$$

$$\frac{45(x-y)}{32(z+y)} : \frac{27(x-y)}{128b(z+y)}; \qquad \frac{45(a+b)x}{64(x+y)z} : \frac{5(a+b)}{16(x+y(}; \qquad \frac{\left(\frac{25ab}{4mn}\right)}{\left(\frac{5a}{2m}\right)} : \frac{84b^3}{21n}.$$

80. Effectuer et simplifier :

$$\frac{\left(\frac{6p^2q^2}{m+n}\right)}{\left[\frac{3(m-n)p}{7(r+s)}\right]} : \frac{\left[\frac{4(r-s)}{21pq^2}\right]}{\left[\frac{r^2-s^2}{4(m^2-n^2)}\right]}; \qquad \frac{\frac{a^2b^2}{c}\cdot\frac{b}{a^2c^2}}{\frac{b^2c^2}{a}\cdot\frac{ac}{b^2}} : \frac{\frac{ab}{c^2}}{\frac{bc}{a^2}}.$$

81. Simplifier l'expression :

$$\frac{\left[\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right]}{\left[\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}-\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right]}.$$

82. — Réduire les expressions suivantes :

$$\frac{(a+b)^2}{4ab}-1; \qquad \frac{(a-b))^2}{4ab}+1, \qquad \frac{a^2+b^2}{a+b}-(a-b);$$

$$\frac{(a+b)^2}{2ab}+\frac{2ab}{(a-b)^2}.$$

83. — Réduire les expressions suivantes :

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}-\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}+\frac{2b^3-b^2+a^2}{a^2-b^2};$$

$$\frac{3m}{7p^2qr^2}+\frac{11n}{3p^3rqs^2}+\frac{14n}{9pq^2r}-\frac{7q}{3r^2p};$$

$$\frac{x^2}{3y^2}+\frac{x^2y^2}{3y^4-x^4}+\frac{x^6}{3y^2(3y^4-x^4)};$$

$$\frac{x}{y}+\frac{2x^2+y^2}{xy}+\frac{3xy^2-3x^3-y^3}{x^2y}-\frac{4xy^3-2x^2y^2-y^4}{x^2y^2}.$$

84. Simplifier :

$$\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1-x+x^2}{1+x^2}-\frac{1+x+x^2}{1-x^2}-1;$$

$$\frac{4a-3b}{2a-11b}-\frac{6a+22b}{6a-33b}-\frac{1}{2a-11b}+1;$$

$$\frac{x^2}{xy+y^2}+\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{y^2}{x^2+xy}.$$

85. Effectuer :

$$\frac{x^2+x+1}{(1-2x)^3}-\frac{x+1}{(1-2x)^2}+\frac{1}{1-2x}.$$

86. Simplifier les expressions :

$$\frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(b^2-a^2)^2}-\frac{1}{(a-b)^2};$$

$$\frac{(2a-3b)^2-a^2}{4a^2-(3b+a)^2}+\frac{4a^2-(3b-a)^2}{9(a^2-b^2)}+\frac{9b^2-a^2)}{(2a+3b)^2-a^2};$$

$$\left[\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right]\cdot\frac{a-b}{2b};$$

$$\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}.$$

87. Simplifier :

$$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1}-\frac{1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}}{\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}};\qquad \frac{1}{a-b+\cfrac{1}{a-\cfrac{1}{b}}};$$

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{b}-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}\cdot\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}\right);$$

$$\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right):\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right).$$

88. Simplifier :

$$\frac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}+1-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}}-x-\dfrac{1}{x-1}};\qquad \frac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}:\frac{\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{b^2}{a^2}}{\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)^2};\qquad \frac{\dfrac{a^3+b^3}{a^2-b^2}}{\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}};$$

$$\left[\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}+\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right]:\left[\frac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}-\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\right].$$

89. Simplifier l'expression :

$$x=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

90. Simplifier l'expression :

$$\frac{2b\left(a+\sqrt{2ab}\right)^2}{\left(2b+\sqrt{2ab}\right)\left(2a-2b+\sqrt{2ab}\right)},$$

91. Réduire l'expression :

$$\frac{x^3}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}.$$

92. Simplifier l'expression :

$$\frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{2}{(a+b)^3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

93. Vérifier les égalités :

$$\sqrt{8+\sqrt{15}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{15}+1\right)$$

$$\sqrt{9+\sqrt{45}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right).$$

94. Montrer que l'on a :

$$(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a-d)(a+b+c+d).$$

95. Montrer que l'expression

$$\frac{a+b}{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)-\frac{b+c}{bc}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)$$

peut se mettre sous la forme d'une différence de deux carrés. Quelle est sa valeur numérique pour

$$a=1,\qquad c=\frac{1}{2}?$$

96. Vérifier l'identité :

$$[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]^2=2[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4].$$

97. Vérifier l'identité :

$$4[(a^2-b^2)xy+ab(x^2-y^2)]^2+[(a^2-b^2)(x^2-y^2)-4abxy]^2$$
$$=(a^2+b^2)^2(x^2+y^2)^2.$$

98. Vérifier l'identité :

$$(x-a)^3(c-b)+(x-b)^3(a-c)+(x-c)^3(b-a)$$
$$=3x(a-b)(b-c)(c-a)+a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b).$$

99. Vérifier l'identité :

$$2(x^2+1)^2=(x^2-2x-1)^2+(x^2+2x-1)^2.$$

100. Si $2s=a+b+c,$

montrer que l'on a les deux identités :

$$(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2$$

et
$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

101. Montrer que l'on a l'identité :

$$\frac{a^2b^2c^2-a^2b^2-c^2+1}{a^2bc-\frac{c}{b}+b\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right)}+1=a^2;\quad \text{si}\quad c=a+2\quad\text{et}\quad b=a-1.$$

102. Vérifier l'identité :

$$\frac{(1+a)\sqrt{1+b^2}-(1+b)\sqrt{1+a^2}}{a-b}=\frac{2(1-ab)}{(1+a)\sqrt{1+b^2}+(1+b)\sqrt{1+a^2}}.$$

103. Effectuer les opérations suivantes, et simplifier :

$$7\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{32};\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{3}{\sqrt{8}};$$

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}};$$

$$5\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{32}-7\sqrt[3]{108}.$$

104. Effectuer les opérations suivantes, et simplifier :

$$\sqrt{2a^2-4ab+2b^2};\qquad \sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2};$$

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}};\qquad (\sqrt{x+y}+\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x+y}-\sqrt{x}+\sqrt{y});$$

$$\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}.$$

105. Montrer que l'on a les égalités suivantes :

$$\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2});$$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+3}=\frac{4\sqrt{2}-5}{7}; \qquad \frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{ab};$$

$$\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}=\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

106. Simplifier :

$$\frac{\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

107. Effectuer le produit :

$$\left(\frac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)^2.$$

108. Trouver la valeur de l'expression :

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} \quad \text{pour} \quad x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right].$$

109. Trouver, en fonction de x, la valeur de l'expression :

$$\frac{\sqrt{az^2-a^2}}{z}.$$

Si l'on a $$z=\frac{\sqrt{ay^2-a^2}}{y} \quad \text{et} \quad y=\frac{\sqrt{ax^2-a^2}}{x}.$$

110. Effectuer et simplifier l'expression :

$$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}.$$

111. Effectuer et simplifier :

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

112. Calculer la valeur de l'expression :

$$\frac{x^2+ax+b}{x^2+bx+c} \quad \text{pour} \quad x=-\sqrt{\frac{b^2-ac}{a-b}}.$$

113. Vérifier l'identité :

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{4a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}.$$

114. Étant donnée l'expression :

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

a, b, c, d étant des nombres donnés, on désigne par y_1, y_2, y_3, y_4 les valeurs que prend y lorsqu'on remplace x respectivement par x_1, x_2, x_3, x_4 et on demande de prouver que l'on a la relation :

$$\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3}:\frac{y_1-y_4}{y_2-y_4}=\frac{x_1-x_3}{x_2-x_3}:\frac{x_1-x_4}{x_2-x_4}.$$

115. Un voiturier qui met 4 jours pour conduire à destination un tonneau de vin contenant a litres en boit chaque jour un litre qu'il remplace de suite par un litre d'eau. Quel sera le volume d'eau introduite dans le tonneau ?

116. Démontrer que si, dans un triangle de surface S, de périmètre $2p$, on a :

$$S=p(p-a)$$

le triangle est rectangle.

117. Vérifier que si l'on pose

$$x+\frac{1}{x}=y$$

on a successivement :

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2; \qquad x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y;$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2; \qquad x^5+\frac{1}{x^5}=y^5-5y^3+5y$$

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

§ 1. — Généralités.

134. — Équations. — Nous savons qu'on dit (n° **129**), que deux *expressions algébriques* sont *équivalentes* si elles sont égales, quelles que soient les valeurs particulières attribuées aux lettres qui y entrent. Désignons, pour abréger, ces deux expressions par A et B, l'égalité

$$A = B$$

est alors dite une *identité*. Par exemple, l'égalité déjà démontrée (n° **50**)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

est une identité.

Si les expressions A et B *ne sont pas équivalentes*, on peut se demander si elles ne deviennent pas égales pour des valeurs particulières attribuées à certaines lettres qu'on appelle *inconnues*. L'égalité

$$A = B$$

ainsi *imposée* aux deux expressions est dite une *équation* (algébrique). Les valeurs particulières qu'il faut donner aux inconnues sont dites les *racines* ou *solutions* de l'équation.

Donc :

On appelle ***équation*** *une égalité qui n'est satisfaite que lorsqu'on attribue à certaines lettres appelées* ***inconnues*** *des valeurs particulières appelées* ***solutions*** *ou* ***racines***.

Résoudre *une équation, c'est trouver ses racines.*

135. — Exemple I. — L'égalité

$$2x+3=x+5$$

n'est pas une identité, car il est facile de se rendre compte que les deux membres ne sont pas égaux *quel que soit* x.

Ainsi pour $x=1$ le premier membre a la valeur 5 et le second la valeur 6; pour $x=10$ le premier membre a la valeur 23 et le second la valeur 15.

Cette égalité est donc une *équation*, et la *résoudre* c'est trouver quelle valeur *particulière* il faut donner à x pour que les deux membres prennent des valeurs numériques égales.

Ceci a lieu pour $x=2$; car pour $x=2$ les deux membres prennent la valeur 7.

$x=2$ est donc une *solution* de l'équation. Nous verrons que c'est la seule.

Exemple II. — Une équation peut avoir *plusieurs* solutions; ainsi l'équation

$$x^2+2=3x$$

a pour racines

$$x=1 \qquad x=2;$$

on prouve d'ailleurs qu'elle n'en a pas d'autres.

Exemple III. — L'équation

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{3}{2}$$

admet pour racines

$$x=3 \qquad \text{et} \qquad x=\frac{3}{4},$$

comme il est facile de le vérifier.

Exemple IV. — L'équation à deux inconnues x et y

$$10x+y=63$$

admet la solution évidente

$$x=6 \qquad y=3;$$

mais elle en admet une infinité d'autres.

136. — Définition. — *On dit que deux équations sont* **équivalentes** *lorsqu'elles admettent les mêmes solutions, c'est-à-dire lorsque toutes les solutions de l'une satisfont à l'autre et réciproquement.*

Ceci posé, la résolution des équations est fondée sur les deux théorèmes suivants qui permettent de remplacer une équation par une équation équivalente.

137. — Théorème I. — ***Lorsqu'on ajoute une même expression algébrique aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.***

Démonstration. — Considérons une équation quelconque

$$A = B \qquad (1)$$

où A et B désignent des expressions qui contiennent une ou plusieurs inconnues ; et soit C une expression algébrique quelconque. Il s'agit de démontrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation

$$A + C = B + C. \qquad (2)$$

1° D'abord toute solution de l'équation (1) est une solution de l'équation (2).

En effet, désignons par a, b, c, les valeurs numériques des expressions A, B, C, quand on y remplace les inconnues par une solution de l'équation (1).

Par hypothèse, on a l'*égalité numérique*

$$a = b;$$

de là on déduit évidemment l'égalité

$$a + c = b + c;$$

ce qui prouve que la solution considérée satisfait à l'équation (2), puisque cela prouve que les valeurs numériques des deux membres de (2) sont égales lorsqu'on y remplace les inconnues par les solutions de (1).

2° En second lieu toute solution de l'équation (2) est une solution de l'équation (1).

En effet, désignons cette fois par a, b, c, les valeurs numériques de A, B, C quand on y remplace les inconnues par une solution de l'équation (2). Par hypothèse on a l'égalité :

$$a + c = b + c,$$

d'où on déduit l'égalité évidente

$$a = b;$$

ce qui prouve que la solution considérée satisfait à l'équation (1). Le théorème est donc démontré.

138. — Application. — Ce théorème sert *à faire passer un terme d'un membre dans l'autre.*

Considérons, par exemple, l'équation

$$2x - 5y + 6 = x + 3y - 7.$$

Ajoutons aux deux membres l'expression $(-3y)$, nous obtenons l'équation équivalente

$$2x - 5y + 6 - 3y = x - 7.$$

Nous avons ainsi fait passer le terme $3y$ d'un membre dans l'autre.

On voit donc que :

On peut faire passer un terme d'une équation d'un membre dans l'autre à la condition de changer son signe.

139. — Conséquence. — Comme on peut ainsi faire passer tous les termes du second membre dans le premier, on voit aussi que :

Toute équation peut prendre la forme

$$A = 0$$

où A désigne une expression algébrique.

140. — Degré d'une équation entière. — Si dans une équation mise sous la forme :

$$A = 0$$

A est un polynôme *entier* par rapport aux inconnues, on dit que l'équation est *entière.*

Le degré du polynôme A est ce qu'on appelle le *degré* de l'équation.

Ainsi l'équation

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

est une équation du second degré à une inconnue. L'équation

$$x^3 - x^2y + x - y + 3 = 0$$

est une équation à deux inconnues, du troisième degré en x, du premier degré en y, et du troisième degré en x et y.

Il faut bien se garder de se prononcer sur le degré d'une équation avant de l'avoir mise sous la forme $A = 0$, A étant *réduit.* Pour savoir le degré d'une équation il faudra toujours *d'abord* la mettre sous la forme $A = 0$.

Ainsi l'équation

$$(x+1)(x+2)=x^2-5$$

paraît du second degré parce que les deux membres sont du second degré; mais quand on la réduit, elle s'écrit :

$$3x+7=0;$$

elle est donc du premier degré.

141. — Théorème II. — ***Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une équation par une même expression algébrique* donnée non nulle, *on obtient une équation équivalente.***

Démonstration. — Considérons l'équation

$$A=B \tag{1}$$

et soit m une expression donnée (et par suite ne contenant pas les inconnues), il s'agit de démontrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation (2)

$$mA=mB. \tag{2}$$

1° D'abord toute solution de l'équation (1) est une solution de l'équation.

Désignons par a et b les valeurs numériques de A et B quand on y remplace les inconnues par une solution de l'*équation* (1).

Par hypothèse, on a l'*égalité numérique*

$$a=b$$

et par suite l'égalité

$$ma=mb;$$

ce qui prouve que la solution considérée satisfait à l'équation (2).

2° Toute solution de l'équation (2) est une solution de l'équation (1).

En effet, désignons cette fois par a et b les valeurs numériques de A et B quand on y remplace les inconnues par une solution de l'équation (2).

Par hypothèse, on a l'égalité :

$$ma=mb,$$

et de là on déduit évidemment, puisque m n'est pas nul, l'égalité :

$$a=b;$$

ce qui prouve que la solution considérée est une solution de l'équation (1). Le théorème est donc démontré.

142. — Remarque. — Si on multiplie les deux membres d'une équation par une expression *non donnée*, c'est-à-dire

contenant l'inconnue (ou les inconnues), on obtient une équation qui peut n'être pas équivalente à l'équation proposée. Par exemple, multiplions les deux membres de l'équation

$$x - 1 = 2x - 3$$

par $x - 4$; la nouvelle équation

$$(x - 1)(x - 4) = (2x - 3)(x - 4)$$

admet bien la solution $x = 2$ de l'équation proposée, mais elle admet, en outre, la solution $x = 4$, qui ne vérifie pas l'équation proposée.

143. — Application. — Le théorème II permet de *chasser les dénominateurs d'une équation.*

Considérons par exemple l'équation

$$\frac{2x}{3} - \frac{1}{6} + x = \frac{x}{4} - 5 + \frac{x}{2},$$

multiplions les deux membres par le plus petit commun multiple des dénominateurs qui est 12, nous obtenons l'équation équivalente

$$8x - 2 + 12x = 3x - 60 + 6x,$$

dépourvue de dénominateur.

144. — Théorème III. — ***Lorsqu'on élève les deux membres d'une équation au carré, on obtient une nouvelle équation qui admet toutes les racines de l'équation proposée, mais qui admet en outre les racines de l'équation obtenue en changeant le signe du second membre de l'équation proposée.***

Démonstration. — Soit, en effet,

$$A = B \qquad (1)$$

une équation; A et B désignant des expressions contenant certaines inconnues.

Élevons les deux membres au carré et nous obtenons l'équation

$$A^2 = B^2. \qquad (2)$$

Pour toute solution de l'équation (1), A et B prennent des valeurs

numériques égales ; il en est donc de même de leurs carrés et, par suite, l'équation (2) est vérifiée.

Inversement, considérons une solution de l'équation (2). Pour ce système de valeurs des inconnues, A^2 et B^2 prennent des valeurs numériques égales ; par suite $A^2 - B^2$ prend la valeur *zéro*. Or, on a :

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Pour que le produit $(A - B)(A + B)$ soit nul, il faut et il suffit que l'un des deux facteurs soit nul. Si c'est $A - B$ qui est nul, on a :

$$A = B$$

et l'équation (1) est vérifiée.

Mais si c'est $A + B$ qui est nul, on a

$$A = -B$$

et ce n'est pas l'équation (1) qui est vérifiée, mais celle que l'on obtient en changeant le signe du second membre.

En résumé, l'équation (2) *n'est pas équivalente* à l'équation (1). Elle admet bien toutes les solutions de cette équation, mais elle *peut* en admettre d'autres qui sont celles de l'équation

$$A = -B, \qquad (3)$$

si celle-ci en admet. Ces solutions de l'équation (3) sont ce qu'on appelle des *solutions étrangères* qu'il faut écarter.

145. — **Application**. — Ce théorème peut être employé pour rendre *entière* une équation *irrationnelle*, c'est-à-dire une équation dans laquelle les inconnues sont engagées sous des radicaux.

Si l'équation ne contient qu'un seul radical, on fait passer ce radical dans un des membres et tous les autres termes dans l'autre membre. C'est ce qu'on appelle *isoler* le radical. En élevant alors les deux membres au carré on fait disparaître le radical.

S'il y a plusieurs radicaux, on les isole *successivement* et on élève plusieurs fois au carré.

Dans tous les cas, l'équation finale obtenue après une ou plusieurs élévations au carré admettra toutes les solutions de l'équation proposée, mais pourra en admettre d'*autres*.

Il faudra donc toujours avoir soin de *vérifier* si les

solutions trouvées conviennent à l'équation proposée et écarter les solutions étrangères.

Par exemple, soit l'équation :

$$\sqrt{x+3} - 5 = 0.$$

Isolons le radical. Elle s'écrit sous la forme équivalente (n° **137**)

$$\sqrt{x+3} = 5.$$

Élevons les deux membres au carré et nous obtenons la nouvelle équation

$$x + 3 = 25,$$

qui admet la solution unique évidente

$$x = 25 - 3 = 22.$$

On ne peut pas affirmer que cette solution satisfait à l'équation proposée : il faut le *vérifier*. Or, si on fait $x = 22$ dans l'équation proposée, on trouve

$$\sqrt{25} - 5 = 0,$$

ce qui est bien exact.

§ 2. — Équations du premier degré à une inconnue.

146. — Définition. — Nous avons vu (n° **140**) comment on définit le degré d'une équation entière. En particulier, on appelle équation du *premier degré à une inconnue* une équation entière, qui, lorsqu'on a fait passer tous les termes dans le premier membre et toutes réductions faites, prend la forme

$$ax - b = 0,$$

ou la forme équivalente

$$ax = b, \tag{I}$$

a, b désignant deux nombres algébriques donnés. Avant de discuter cette équation, étudions quelques exemples numériques.

147. — Exemple I. — *Ramener à la forme* (I) *l'équation*

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{4} = \frac{x}{8} + \frac{1}{12}$$

et en déduire la solution.

Si on multiplie les deux membres par 24, qui est le plus petit commun multiple des dénominateurs, on obtient l'équation équivalente (Th. II, n° **141**)

$$8x - 6 = 3x + 2.$$

L'application du théorème I (n° **137**) montre que cette équation équivaut à la suivante :

$$8x - 3x = 6 + 2,$$

ou

$$5x = 8.$$

L'équation proposée étant mise sous cette forme, on voit qu'elle admet une solution et une seule, car elle exprime que x est le nombre qui multiplié par 5 donne pour produit 8. C'est donc le quotient de 8 par 5 :

$$x = \frac{8}{5} = 1,6.$$

148. — Exemple II. — *Considérons l'équation*

$$(x - 1)\ (x - 2) = x^2.$$

En développant les calculs on trouve l'équation

$$x^2 - 3x + 2 = x^2,$$

qui équivaut à l'équation du premier degré

$$-3x + 2 = 0$$

ou

$$3x = 2.$$

Donc

$$x = \frac{2}{3}$$

est la solution cherchée.

149. — Exemple III. — Même problème pour l'équation

$$\frac{x}{2} - 7 - \frac{x}{5} = \frac{x}{4} - \frac{1}{5} + \frac{x}{20}.$$

En multipliant les deux membres par 20, on trouve l'équation équivalente

$$10x - 140 - 4x = 5x - 4 + x.$$

Si on fait passer les termes en x dans le premier membre et les termes connus dans le second, on trouve l'équation équivalente

$$0 \cdot x = 136\ ;$$

il est clair alors que l'équation donnée est *impossible*, car il n'y a aucun nombre qui, multiplié par 0, donne un produit autre que 0.

150. — Les exemples qui précèdent nous conduisent alors à la règle suivante :

Règle. — ***Pour résoudre une équation du premier degré à une inconnue :***

1° On chasse les dénominateurs s'il y en a;

2° On développe les calculs dans les deux membres;

3° On fait passer tous les termes inconnus dans le premier membre et tous les termes connus dans le second.

On parvient ainsi à une équation de la forme $ax = b$, ***dont la solution est évidente.***

151. — Discussion. — Revenons maintenant à l'équation du premier degré

$$ax = b \qquad \text{(I)}$$

et supposons d'abord que a ne soit pas nul : $a \neq 0$.

Résoudre l'équation (I), c'est chercher un nombre x qui, multiplié par a, devienne égal à un nombre donné b. Ce nombre est, par définition, le quotient de b par a et il est égal à la fraction $\frac{b}{a}$. Donc, l'équation a dans ce cas *une solution et une seule*, à savoir

$$x = \frac{b}{a}.$$

Supposons maintenant que a soit nul, mais que b soit différent de zéro

$$a = 0, \qquad b \neq 0,$$

dans ce cas l'équation est évidemment impossible (comme dans l'exemple III (n° **149**).

Enfin, si a et b sont nuls tous deux

$$a = 0 \qquad b = 0,$$

l'inconnue x est *indéterminée*, c'est-à-dire arbitraire, car l'égalité

$$0 \cdot x = 0$$

est vraie quelle que soit x.

152. — Remarque. — Lorsque dans l'équation $ax = b$, b étant différent de zéro, a est aussi différent de zéro, il y a *une* solution ; lorsque a est nul, il n'y a pas de solution.

En d'autres termes, quand a devient égal à zéro, la solution *disparaît*. On peut se demander *comment* s'est effectuée cette disparition.

Supposons alors que, dans l'équation (I), le coefficient b reste fixe et que a prenne des valeurs de plus en plus voisines de zéro, nous savons que la fraction

$$x = \frac{b}{a}$$

devient *infinie* (n° **106**) lorsque a tend vers zéro, donc on peut dire : *lorsque* b *restant constant et non nul*, a *tend vers zéro, la solution de l'équation* (I) *disparaît ou s'évanouit en devenant infinie*.

Exemple. — Considérons par exemple l'équation

$$x - a = yx \quad \text{où} \quad a \neq 0$$

que nous avons déjà rencontrée (n° **105**). Elle peut s'écrire

$$x(1 - y) = a$$

et la discussion précédente fournit les résultats suivants.

Si y a une valeur différente de 1, l'équation admet une solution et une seule.

Si y tend vers 1, cette solution disparaît en devenant infinie.

Ces résultats concordent bien avec les résultats géométriques déjà signalés (nº **105**).

153. — Équations qui se ramènent au premier degré. — Certaines équations soit fractionnaires, soit irrationnelles peuvent se ramener à des équations entières du premier degré, en appliquant les théorèmes des nºˢ **141** et **144**.

Mais il faut avoir bien soin de ne pas oublier qu'on peut, dans ces cas, *introduire des solutions étrangères*. Il faudra donc toujours vérifier si les solutions obtenues satisfont bien les équations proposées.

154. — Exemple IV. — *Soit à résoudre l'équation*

$$\frac{x-a}{x-b}=\frac{x-c}{x-d}.$$

Chassons les dénominateurs et nous obtenons l'équation

$$(x-a)(x-d)=(x-c)(x-b)$$

ou, en développant les deux membres

$$x^2-(a+d)x+ad=x^2-(b+c)x+bc.$$

Cette équation est du premier degré, car elle s'écrit

$$(b+c-a-d)x=bc-ad.$$

Si $b+c-a-d$ n'est pas nul, elle admet une seule solution qui est :

$$x=\frac{bc-ad}{b+c-a-d}.$$

Cette solution n'est pas *étrangère*, car (nº **142**), les seules solutions étrangères qu'on aurait pu introduire sont celles qui annulent les dénominateurs, c'est-à-dire $x=b$ ou $x=d$.

155. — Exemple V. — *Soit à résoudre l'équation*

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=3.$$

Isolons le premier radical (n° **145**). Nous obtenons l'équation équivalente

$$\sqrt{x-2}=3-\sqrt{x+1}.$$

Élevons les deux membres au carré et il vient

$$x-2=9-6\sqrt{x+1}+x+1.$$

Isolons le second radical en le faisant passer seul dans le premier membre; nous obtenons

$$6\sqrt{x+1}=12$$

ou, en divisant par 6,

$$\sqrt{x+1}=2.$$

Élevons encore une fois les deux membres au carré et nous obtenons finalement

$$x+1=4,$$

d'où $$x=3.$$

Comme nous avons élevé deux fois au carré, nous ne pouvons pas affirmer que cette solution convient à l'équation donnée. Il faut le *vérifier*. Faisons $x=3$ dans l'équation proposée et il vient

$$\sqrt{1}+\sqrt{4}=3.$$

Ce qui a bien lieu. L'équation proposée a donc une seule solution $x=3$.

Remarque. — Si, au lieu de l'équation précédente, on avait proposé l'équation

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=3,$$

on aurait été conduit par des élévations au carré à *la même* équation finale que plus haut.

La solution trouvée $x=3$ ne conviendrait pas alors à cette équation. On peut donc affirmer que cette nouvelle équation *n'a pas de solution.*

§ 3. — Inégalités du premier degré à une inconnue.

156. — Définitions. — De même qu'on distingue les égalités en deux espèces, les identités et les équations, on peut distinguer dans les inégalités celles qui ont lieu quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres qui y figurent et celles qui n'ont lieu que si on donne à certaines lettres, appelées *inconnues*, des valeurs convenablement choisies. Nous désignerons ces dernières inégalités sous le nom d'*inégalités conditionnelles*.

Donc :

On appelle **inégalité conditionnelle** *une inégalité qui n'est vérifiée que si on attribue à certaines lettres appelées* **inconnues** *des valeurs convenablement choisies.*

Résoudre *une inégalité, c'est trouver les valeurs qu'il faut donner aux inconnues pour qu'elle soit satisfaite.*

Deux inégalités conditionnelles sont dites *equivalentes* lorsqu'elles admettent les mêmes solutions, c'est-à-dire lorsque toute solution de l'une est une solution de l'autre et réciproquement.

Des raisonnements analogues à ceux que nous avons faits (§ 1) dans la théorie des équations permettent d'établir les théorèmes suivants :

157. — Théorème I. — *Lorsqu'on ajoute une même expression algébrique aux deux membres d'une inégalité conditionnelle, on obtient une inégalité équivalente.*

Ce théorème permet de *faire passer un terme d'une inégalité d'un membre dans l'autre.*

Il en résulte que :

On peut mettre toute inégalité conditionnelle sous la forme

$$A > 0,$$

A désignant une certaine expression algébrique.

Si A est un polynôme entier par rapport aux inconnues, l'inégalité est dite *entière*. Le degré du polynôme est le *degré* de l'inégalité.

158. — **Théorème II.** — *Lorsqu'on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité conditionnelle par un même nombre :*

1° *Si le nombre est* **positif**, *on obtient une inégalité équivalente ;*

2° *Si le nombre est* **négatif**, *on obtient une inégalité équivalente à condition de* **changer le sens** *de l'inégalité.*

Ce théorème se démontre comme celui du n° **141**, en tenant compte du théorème du n° **70**; il permet de *faire disparaître les dénominateurs d'une inégalité.*

159. — Exemple. — *Soit à résoudre l'inégalité*

$$5x - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} > 3x - \frac{1}{6} + \frac{x}{3}.$$

Multiplions d'abord les deux membres par 6, nous obtenons l'inégalité équivalente

$$30x - 3x - 2 > 18x - 1 + 2x$$

qui se transforme en la suivante

$$30x - 3x - 18x - 2x > 2 - 1$$

ou bien

$$7x > 1.$$

La solution cherchée est donc

$$x > \frac{1}{7}.$$

160. — Cet exemple suffit pour montrer la marche à suivre :

Règle. — ***Pour résoudre une inégalité du premier degré à une inconnue :***

1° ***On chasse les dénominateurs en appliquant le théorème*** II (n° **158**) ;

2° ***On fait passer tous les termes dans un membre. On obtient ainsi une inégalité de la forme :*** $ax - b > 0$.

Considérons alors l'inégalité générale du premier degré

$$ax - b > 0.$$

Cette inégalité équivaut à la suivante

$$ax > b.$$

1° Si a est positif, en multipliant par $\frac{1}{a}$ (n° **158**), il vient :

$$x > \frac{b}{a}.$$

Cette inégalité, équivalente à la proposée, met les solutions en évidence.

2° Si a est négatif, en multipliant les deux membres de l'inégalité

$$ax > b$$

par $\frac{1}{a}$ il faut changer le sens. On obtient ainsi

$$x < \frac{b}{a}$$

qui met la solution en évidence.

§ 4. — Équations du premier degré à plusieurs inconnues.

161. — Deux méthodes. — Les procédés de calcul utilisés pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues peuvent être classés en deux catégories connues sous le nom de *méthode de substitution* et *méthode d'élimination.*

Nous allons les exposer successivement en traitant d'abord quelques exemples.

162. — Exemple I. — Considérons d'abord un système tel que le suivant

$$\begin{cases} y = 2x - 13, \\ 3x - 2y = 17, \end{cases}$$

dans lequel l'une des équations est résolue par rapport à l'une des inconnues. Dans ce cas, on emploie la *méthode de substitution*.

On remplace, dans la seconde équation, y par sa valeur tirée de la première, ce qui donne

$$3x - 2(2x - 13) = 17$$

ou

$$3x - 4x + 26 = 17,$$

et, par suite,

$$x = 9.$$

La première équation donne alors, en y remplaçant x par sa valeur,

$$y = 2 \cdot 9 - 13 = 5.$$

163. — Justification. — Il est très aisé de justifier la méthode précédente. Considérons plus généralement le système suivant

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} y = ax + b, \\ mx + ny = p, \end{cases}$$

a, b, m, n, p, représentant des nombres algébriques donnés.

Concevons une solution (x, y) du système. La valeur x doit évidemment satisfaire à l'égalité :

$$mx + n(ax + b) = p$$

ou

$$(m + na)x + bn = p,$$

obtenue en remplaçant y par sa valeur dans la seconde équation donc x est forcément égal à

$$x = \frac{p - bn}{m + na} \qquad (1)$$

si, comme nous le supposerons, $(m + na)$ n'est pas nul. Alors y est forcément donné par

$$y = ax + b = \frac{a(p - bn)}{m + na} + b,$$

ou

$$y = \frac{ap + bm}{m + na}. \qquad (2)$$

Réciproquement, si on remplace, dans la seconde équation du système (I), x et y par leurs valeurs (1) et (2), on trouve que cette équation est vérifiée. Donc dans les cas où $(m + na)$ n'est pas nul, le système (I) admet une solution et une seule définie par les égalités (1) et (2).

164. — Exemple II. — Dans les exemples qui précèdent, nous avons supposé que l'une des deux équations était *résolue* par rapport à l'une des inconnues y. S'il n'en est pas ainsi, on commence par résoudre l'une des deux équations par rapport à l'une quelconque des deux inconnues.

Considérons par exemple le système

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{3} - y + 2 = y + 1, \\ 2x + y - 3 = 5y - 3x + 8. \end{array}\right.$$

Résolvons la première équation par rapport à x, comme si c'était une équation à une seule inconnue, nous obtiendrons (nos 138 et 143) l'équation *équivalente* :

$$x = 6y - 3,$$

qui peut remplacer la première. Le système proposé peut donc s'écrire sous la forme équivalente :

$$\left\{\begin{array}{r} x = 6y - 3, \\ 2x + y - 3 = 5y - 3x + 8. \end{array}\right.$$

Il a maintenant la forme précédente. Remplaçons x par sa valeur dans la seconde équation et elle devient :

$$12y - 6 + y - 3 = 5y - 18y + 9 + 8.$$

On en tire :

$$26y = 26,$$

ou

$$y = 1.$$

On a, alors :

$$x = 6y - 3 = 6 - 3 = 3.$$

165. — Méthode de substitution. — Les exemples qui précèdent nous suffisent pour pouvoir alors énoncer la règle suivante :

Règle. — *Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues :*

1° ***On résout l'une des équations par rapport à l'une des inconnues comme si cette inconnue était seule ;***

2° ***On porte la valeur ainsi obtenue dans la seconde équation ;***

3° ***On tire alors de la seconde équation la valeur de la seule inconnue qu'elle contient ;***

4° ***On porte cette valeur de l'inconnue calculée dans la première équation, qui ainsi donne la valeur de l'autre inconnue.***

Cette méthode est dite *de substitution*, parce qu'elle consiste à *substituer* dans l'une des équations, à l'une des inconnues, sa valeur tirée de l'autre.

166. — Exemple III. — Considérons le système simple

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x + y = a, \\ x - y = b, \end{cases}$$

que l'on obtient, quand on cherche deux nombres connaissant leur somme a et leur différence b.

Soit (x, y) une solution de ce système. Il est clair que ces nombres (x, y) satisfont aussi à l'équation obtenue en ajoutant membre à membre les équations (II). Or, en faisant cette opération, on trouve évidemment

$$2x = a + b$$

ou

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

De même, en retranchant membre à membre la seconde équation de la première, on trouve

$$y = \frac{a-b}{2}.$$

On vérifiera aisément que ces nombres (x, y) satisfont bien au système (II).

167. — Exemple IV. — Soit encore le système

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n}, \end{cases}$$

que l'on obtient en cherchant à partager un nombre donné a en parties proportionnelles à deux nombres donnés m et n.

Comme dans l'exemple précédent, concevons une solution (x, y) du système III. En vertu d'un théorème connu sur les rapports égaux, ces nombres doivent satisfaire aux égalités suivantes

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{x+y}{m+n};$$

on voit donc que l'on a :

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{a}{m+n}$$

et, par suite,

$$x = \frac{am}{m+n}, \quad y = \frac{an}{m+n}.$$

Il est aisé de vérifier que ces nombres satisfont bien au système (III).

On rencontre fréquemment ce système en géométrie, par exemple quand on cherche à calculer les segments déterminés par les bissectrices d'un triangle sur les côtés, quand on cherche la surface latérale et le volume d'un tronc de cône, etc....

168. — Remarque. — On résout de même le système

$$\text{(III } bis\text{)} \quad \begin{cases} x - y = a, \\ \dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n}. \end{cases}$$

On trouve

$$x = \frac{am}{m-n}, \quad y = \frac{an}{m-n}.$$

169. — Exemple V. — Le procédé employé dans l'exemple III, qui consiste à ajouter et à retrancher les deux équations a réussi, parce que dans les deux équations les coefficients de x ou ceux de y étaient *égaux en valeur absolue*. Alors, en ajoutant les équations, y disparaissait,

y était *éliminé*. De même, en retranchant, x disparaissait, x était *éliminé*.

Lorsque les coefficients de x ne sont pas égaux, on les rend égaux en multipliant les deux équations par des facteurs convenables.

Appliquons ceci à un exemple.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Prenons d'abord comme *multiplicateurs* les nombres 2 et 3. Multiplions la première par 2 et la seconde par 3. Nous obtenons les équations *équivalentes* (n° **141**)

$$\begin{cases} 4x - 6y = 2, \\ 3x + 6y = 12. \end{cases}$$

Dans ces deux équations, les coefficients de y sont *égaux en valeur absolue*. Ajoutons-les membre à membre ; y disparaît et nous obtenons

$$(4 + 3)x = 2 + 12,$$

d'où

$$x = 2.$$

De même, si on prend comme multiplicateurs (-1) et 2 et si on ajoute membre à membre, x disparaît et on trouve

$$(3 + 4)y = -1 + 8,$$

d'où

$$y = 1.$$

Ce calcul se trouvera justifié par ce qui suit.

170. — **Système général**. — Considérons maintenant un système quelconque de deux équations du premier degré à deux inconnues.

En faisant passer, dans chaque équation, les inconnues dans le premier membre et les termes tout connus dans

le second, on obtiendra toujours un système de la forme

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

où a, b, a', b', c, c' désignent des nombres connus.

Multiplions la première équation par b' et la seconde par b. Nous obtenons le système *équivalent* (n° **141**)

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = cb', \\ ba'x + bb'y = bc'. \end{cases}$$

Dans ces deux équations, les coefficients de y sont *égaux*. Toute solution (x, y) de ce système vérifie évidemment l'équation obtenue en les retranchant membre à membre, ce qui *élimine* y et donne

$$(ab' - ba')x = cb' - bc'. \qquad (1)$$

Multiplions ensuite la première équation par a' et la seconde par a. Nous obtenons le nouveau système équivalent au système (IV) :

$$\begin{cases} aa'x + ba'y = ca', \\ aa'x + ab'y = ac'. \end{cases}$$

Dans ces deux nouvelles équations, les coefficients de x sont *egaux*. Toute solution de ce système vérifie évidemment l'équation obtenue en retranchant la première de la seconde. Cette opération *élimine* x et donne :

$$(ab' - ba')y = ac' - ca'. \qquad (2)$$

Ce calcul prouve que si (x, y) est une solution du système (IV), forcément x satisfait à l'équation (1) et y à l'équation (2).

Supposons

$$ab' - ba' \neq 0,$$

les équations (1) et (2) admettent alors une solution et une seule

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}. \qquad (3)$$

Si on porte ces valeurs dans le système (IV), on trouve aisément qu'il est vérifié, donc on peut énoncer le théorème général suivant :

Si $ab' - ba' \neq 0$, *le système* (**IV**) *admet une solution et une seule, définie par les formules* (3).

171. — Méthode d'élimination. — Les exemples qui précèdent mettent bien en évidence la méthode générale à suivre, que l'on peut résumer comme suit :

Règle. — *Pour résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues, on commence d'abord par les mettre sous la forme*

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c',$$

en faisant passer, dans chacune des deux équations, les termes inconnus dans le premier membre et les termes tout connus dans le second membre et réduisant.

Ceci fait, pour calculer la valeur d'une des deux inconnues, on **élimine** *l'autre.*

Pour éliminer une des deux inconnues, on multiplie chacune des deux équations par le coefficient de cette inconnue dans l'autre équation et on retranche les deux équations ainsi multipliées, membres à membres.

Exemple. — *Soit à résoudre le système*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 7 = 2x + 1; \\ \frac{x}{3} - 7y + 1 = x + y. \end{array} \right.$$

Chassons les dénominateurs. Les équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 42 = 12x + 6, \\ x - 21y + 3 = 3x + 3y. \end{array} \right.$$

Ramenons à la forme réduite (IV) (n° **170**) et le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 9x + 2y = 36, \\ 2x + 24y = 3. \end{array} \right.$$

Éliminons y. Multiplions la première par 24 et la seconde par 2 et retranchons et il vient :

$$(24\cdot 9 - 2\cdot 2)x = 36\cdot 24 - 3\cdot 2$$

ou

$$212x = 858.$$

Ce qui donne

$$x = \frac{858}{212} = \frac{429}{106}.$$

Éliminons de même x. Multiplions la première équation par 2 et la seconde par 9 et retranchons, il vient :

$$(24\cdot 9 - 2\cdot 2)y = 3\cdot 9 - 36\cdot 2$$

ou

$$212y = -45;$$

ce qui donne :

$$y = -\frac{45}{212}.$$

Remarque. — On peut quelquefois employer des multiplicateurs plus simples que ceux fournis par la règle précédente. Ainsi pour éliminer y on aurait pu multiplier la première équation par 12 et ne pas toucher à la seconde. Les coefficients de y auraient été ainsi égaux. En retranchant on trouverait :

$$(12\cdot 9 - 2)x = 12\cdot 36 - 3$$

ou

$$x = \frac{429}{106}.$$

172. — Discussion générale d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. — Tout système de deux équations du premier degré à deux inconnues peut se ramener, en faisant passer tous les termes inconnus dans le premier membre et les termes connus dans le second, à la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Supposons d'abord l'un des quatre coefficients a, b, a', b différent de zéro; soit, par exemple, a.

Nous pouvons alors résoudre la première équation du système (1) par rapport à x et nous obtenons

$$(2)\qquad x = \frac{c - by}{a}.$$

Portons cette valeur de x dans la seconde équation et il vient :

$$a' \frac{c-by}{a} + b'y = c'$$

qui s'écrit, en multipliant par a,

$$a'(c-by) + ab'y = ac'$$

ou

(3) $$(ab' - ba')y = ac' - ca' :$$

1° *Si* ab' — ba' *est différent de zéro*, l'équation (3) donne une valeur pour y et une seule :

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (2), on a la valeur de x :

$$x = \frac{c - b\dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}}{a} = \frac{cab' - cba' - bac' + bca'}{a(ab' - ba')}.$$

En simplifiant, il vient :

$$x = \frac{cab' - bac'}{a(ab' - ba')}$$

et, en divisant les deux termes de la fraction par a,

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Le système admet donc, dans ce cas, une solution et une seule donnée par les formules

(4) $$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \\ y &= \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}, \end{aligned} \right.$$

déjà données au n° **170**.

Ces formules sont connues sous le nom de *formules de Cramer*;

2° *Si* ab′ — ba′ *est nul et que* ac′ — ca′ *n'est pas nul*, l'équation (3) devient :

$$0 \cdot y = ac' - ca'$$

et n'admet aucune solution. Elle exprime, en effet, que y devrait être un nombre qui multiplié par *zéro* donnerait un produit $ac' - ca'$ *non nul*, ce qui est impossible.

Ceci revient à dire que tout système de valeurs de x et y vérifiant la première des équations du système (1) ne vérifie pas la seconde. *Le système n'a donc pas de solution.* Les deux équations (1) sont dites *incompatibles*;

3° *Si* ab′ — ba′ *et* ac′ — ca′ *sont nuls tous les deux à la fois*, l'équation (3) se réduit à

$$0 \cdot y = 0.$$

C'est une *identité*. Elle est vérifiée quelle que soit la valeur de y. Ceci revient à dire que tout système de valeurs de x et y vérifiant l'égalité (2) vérifie, à la fois, les deux équations du système (1).

Dans ce cas, il y a une infinité de solutions. On peut donner à y une valeur *arbitraire* et la valeur correspondante de x est donnée par la formule (2);

4° *Supposons maintenant que ces quatre coefficients* a, b, a′, b′ *soient nuls tous les quatre.* On ne peut pas alors résoudre l'une des équations (1) par rapport à l'une des inconnues et ces équations s'écrivent :

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = c, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = c'. \end{cases}$$

Si c *et* c′ *ne sont pas nuls tous les deux*, l'une au moins des deux équations est impossible et *le système n'a pas de solution.*

Si c *et* c′ *sont nuls tous les deux*, les deux équations sont des *identités*. Elles sont vérifiées quelles que soient les

valeurs de x et y. Il y a une infinité de solutions obtenues en prenant pour x et y des valeurs *absolument arbitraires.*

173. — **Remarque I.** — Lorsque, a étant différent de zéro, on a :

$$ab' - ba' = 0 \quad , \quad ac' - ca' = 0,$$

les deux équations (1) ont leurs coefficients proportionnels. En effet, les deux conditions précédentes s'écrivent :

$$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} \quad \text{et} \quad \frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}.$$

On a donc :

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

Il en résulte que si on multiplie les deux membres de l'équation

$$ax + by = c$$

par $\frac{a'}{a}$, on retrouve la seconde équation

$$a'x + b'y = c'.$$

En d'autres termes, on a l'*identité* :

$$\frac{a'}{a}(ax + by - c) = a'x + b'y - c';$$

ce qui prouve bien que tout système de valeurs de x et y qui annule $ax + by - c$ annule aussi

$$a'x + b'y - c';$$

c'est-à-dire que toute solution de la première équation vérifie la seconde.

174. — **Remarque II.** — Il y a deux cas où il y a une infinité de solutions :

En premier lieu lorsque

$$a \neq 0 \quad , \quad ab' - ba' = 0 \quad , \quad ac' - ca' = 0;$$

et en second lieu lorsque

$$a = a' = b = b' = c = c' = 0.$$

Mais ces deux cas sont très distincts.

Dans le premier cas, nous avons vu, qu'il n'y a qu'*une* inconnue y qu'on peut prendre arbitrairement, qui est *indéterminée*.

Dans le second cas, les *deux* inconnues sont indéterminées.

C'est pourquoi l'on dit que : dans le premier cas, il y a *indétermination du premier ordre* et dans le second cas *indétermination complète*.

175. — Exemples. — *Considérons d'abord le système*

$$\begin{cases} 8x - 6y = 11, \\ 12x - 9y = 25. \end{cases}$$

On a ici :

$$ab' - ba' = 8 \cdot (-9) - 12(-6) = -72 + 72 = 0,$$
$$ac' - ca' = 8 \cdot 25 - 12 \cdot 11 = 200 - 132 = 68 \neq 0.$$

Le système est donc *impossible*. Il n'y a pas de solution.

D'ailleurs, si on applique la méthode de substitution, on a

$$x = \frac{11 + 6y}{8}.$$

En portant cette valeur dans la seconde équation, on trouve

$$12(11 + 6y) - 8 \cdot 9y = 8 \cdot 25$$

ou

$$0 \cdot y = 68,$$

équation impossible.

Considérons en second lieu le système

$$\begin{cases} 8x - 6y = 11, \\ 12x - 9y = 16,5. \end{cases}$$

Ici on a :

$$ab' - ba' = 8(-9) - 12(-6) = -72 + 72 = 0,$$
$$ac' - ca' = 8 \cdot 16,5 - 12 \cdot 11 = 132 - 132 = 0.$$

Le système est *indéterminé*.

Si, en effet, on tire x de la première équation

$$x = \frac{11 + 6y}{8}$$

et qu'on porte dans la seconde, celle-ci devient

$$0 \cdot y = 0.$$

Toute solution de la première équation vérifie la seconde. Il y a donc une *infinité de solutions*. On peut prendre pour y une valeur arbitraire, et la valeur de x en résulte.

Ainsi, on a les solutions :

$$y = 0 \quad , \quad x = \frac{11}{8}; \qquad y = 1 \quad , \quad x = \frac{17}{8};$$

$$y = -1 \quad , \quad x = \frac{5}{8}; \qquad y = 2 \quad , \quad x = \frac{23}{8};$$

et ainsi de suite.

176. — Équations à plusieurs inconnues. — Méthode de substitution. — Les méthodes de résolution que nous venons d'exposer pour deux équations du premier degré à deux inconnues pourraient s'étendre à des systèmes d'équations du premier degré contenant plus de deux inconnues ; nous nous contenterons de donner la méthode de substitution, qui s'applique sans modifications.

Règle. — *Pour résoudre un système d'équations du premier degré, le nombre des équations étant égal au nombre des inconnues :*

On résout l'une des équations par rapport à l'une des inconnues qu'elle contient ;

On substitue la valeur de cette inconnue dans les équations restantes.

Ces équations restantes forment ainsi un nouveau système contenant une équation et une inconnue de moins que le précédent.

On recommence sur ce système comme sur le système proposé et on continue jusqu'à ce qu'on parvienne à une dernière équation à une seule inconnue, qui donne la valeur de cette inconnue.

En portant cette valeur dans l'équation résolue précédente on aura la valeur d'une seconde inconnue, et ainsi de suite en remontant de proche en proche et en portant dans les équations résolues les valeurs des inconnues déterminées.

Appliquons à des exemples.

177. — Exemple I. — *Résoudre le système*

$$(1)\qquad \begin{cases} x - z = 3, \\ y - x + 2 = 0, \\ 3z - y - 1 = 0. \end{cases}$$

De la première équation je tire :

$$(2)\qquad x = z + 3$$

et je substitue cette valeur de x dans les deux autres, ce qui donne un système de deux équations à deux inconnues :

$$(3)\qquad \begin{cases} y - (z + 3) + 2 = 0, \\ 3z - y - 1 = 0. \end{cases}$$

De la première équation de ce nouveau système je tire :

$$(4)\qquad y = z + 1,$$

et je porte cette valeur dans la dernière qui devient :

$$3z - (z + 1) - 1 = 0.$$

Cette dernière donne :

$$2z = 2,$$

d'où

$$z = 1.$$

En portant cette valeur de z dans l'équation *résolue* (4), on a :

$$y = 1 + 1 = 2.$$

Enfin, en portant la valeur de z dans l'équation *résolue* (2) on a :

$$x = 1 + 3 = 4.$$

Le système admet donc la solution

$$x = 4, \qquad y = 2, \qquad z = 1.$$

178. — Exemple II. — *Résoudre le système* :

$$\begin{cases} x + y + z = 3a + b + c, \\ x + y + t = a + 3b + c, \\ x - z - t = a + b - c, \\ y + z - t = 3a - b - c. \end{cases}$$

La première donne :

$$(1) \qquad x = 3a + b + c - y - z.$$

En portant dans les trois dernières on a :

$$\left\{\begin{array}{l} 3a + b + c - y - z + y + t = a + 3b + c, \\ 3a + b + c - y - z - z - t = a + b - c, \\ y + z - t = 3a - b - c; \end{array}\right.$$

ou, en simplifiant :

$$\left\{\begin{array}{r} t - z = -2a + 2b, \\ y + 2z + t = 2a + 2c, \\ y + z - t = 3a - b - c. \end{array}\right.$$

La première équation de ce nouveau système donne :

$$(2) \qquad z = t + 2a - 2b,$$

qui, portée dans les suivantes, donne :

$$\left\{\begin{array}{l} y + 2(t + 2a - 2b) + t = 2a + 2c, \\ y + t + 2a - 2b - t = 3a - b - c, \end{array}\right.$$

ou, en simplifiant :

$$\left\{\begin{array}{r} y + 3t = -2a + 4b + 2c, \\ y = a + b - c. \end{array}\right.$$

La dernière est toute résolue et donne y.

Portons dans la précédente, qui donne :

$$3t = -3a + 3b + 3c,$$

ou

$$t = -a + b + c.$$

En substituant cette valeur de t dans l'équation (2) on a :

$$z = a - b + c.$$

Et, enfin, les valeurs de y et z portées dans l'équation (1) donnent :

$$x = a + b + c.$$

En résumé, le système admet la solution :

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + b + c, \\ y = a + b - c, \\ z = a - b + c, \\ t = -a + b + c. \end{array}\right.$$

EXERCICES

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A UNE INCONNUE

118. Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-2}-\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

119. Résoudre les équations :

$$\frac{4x-3}{2x-1}=\frac{4x-7}{2x-5}; \qquad \frac{7x+16}{21}-\frac{x+8}{4x+10}=\frac{23}{70}+\frac{x}{3};$$

$$\frac{1}{2x-3}-\frac{3}{2x^2-3x}=\frac{5}{x}; \qquad \frac{7}{24}-\frac{\frac{13}{15}}{\frac{2x}{3}+\frac{4}{5}}=\frac{1}{4}.$$

120 Résoudre les équations :

$$\frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{3}\right)=0; \qquad \frac{4x-8}{10}-\frac{20-x}{4}+\frac{x+\frac{1}{2}}{3}=6+\frac{1}{6};$$

$$\frac{1}{9}\left\{3x-6-5\left(\frac{7x}{2}-5\right)\right\}+13(x-5)+\frac{1}{4}=0.$$

121. Résoudre :

$$\frac{2x}{3}+\frac{\frac{3x-5}{4}-\frac{5x-3}{6}}{\frac{4x-3}{9}-\frac{2x-5}{4}}=\frac{2x-4}{3};$$

$$\frac{4x-7}{3}+\frac{15}{4}+\frac{57-9x}{4}=241-\frac{5x-32}{4}-33x.$$

122. Résoudre :

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)=\frac{x-3+\frac{5x}{2x-6}\Big)\frac{3}{2}x}{2x-1+\frac{15}{x-3}}.$$

123. Résoudre l'équation :

$$\frac{x}{24}+\frac{1-x}{20}-\frac{2(3-x)}{15}=\frac{x+1}{21}.$$

124. Résoudre l'équation :

$$x^2+a(b+c)=(a+x)(b+x)-\frac{a^2c}{b}.$$

125. Résoudre l'équation :

$$\frac{5x-\frac{3}{2}}{9x-\frac{5}{4}}=\frac{4}{13}.$$

126. Résoudre :

$$\frac{\frac{5x}{4}-\frac{8}{9}}{\frac{7}{8}}=\frac{2}{3}x.$$

127. Résoudre :

$$\frac{7(7-x)}{6}-\frac{3(17-2x)}{9}=\frac{4x-9}{7}-\frac{13-x}{2}+4.$$

128. Résoudre :

$$\frac{x-a}{b}-\frac{x-b}{a}=\frac{b}{a}.$$

129. Résoudre les équations :

$$(x-1)(x-2)+(x-1)(x-3)=2(x-2)(x-3);$$

$$\frac{5-3x}{4}+\frac{5x}{3}=\frac{3}{2}-\frac{3-5x}{3}; \qquad \frac{3x-5}{4}-\frac{7x+9}{16}+\frac{8x+19}{8}+\frac{69}{8}=0;$$

$$\frac{x-1}{7}+\frac{23-x}{5}=7-\frac{4+x}{4}.$$

130. Résoudre l'équation :

$$\frac{x+4a+b}{x+a+b}+\frac{4x+a+2b}{x+a-b}=5.$$

131. Résoudre l'équation :

$$\frac{x-a}{x-a-1}-\frac{x-a-1}{x-a-2}=\frac{x-b}{x-b-1}-\frac{x-b-1}{x-b-2}.$$

132. Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}=ab^2-\frac{a+b}{x}.$$

133. Résoudre l'équation :

$$\frac{1}{\frac{3(m+n)^2}{p^2x}-\frac{m+n}{p}}=\frac{p}{2(m+n)}.$$

134. Résoudre l'équation :

$$\frac{(a+b)^2(x+1)-(a+b)(x+1)+x+1}{a+b+1}=(a+b)^2-(a+b)+1.$$

135. Résoudre les équations :

$$\sqrt{x-1}=3;\qquad \sqrt{x+1}+4=0;\qquad \sqrt{2x+4}-5=0;$$
$$\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+6}=0;\qquad \sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=5;$$
$$\sqrt{2x+6}-\sqrt{2x-6}=2;\qquad \sqrt{x^2+4}-x+5=0.$$

INÉGALITÉS CONDITIONNELLES

136. Résoudre les inégalités :

$$5x+3>3x-7;\qquad \frac{x}{2}+1<\frac{7x}{3}-8;$$
$$(x-1)(x-2)<(x+1)(x+3);$$
$$(x-1)(x-2)(x-3)-x^2(x-6)>0.$$

137. Trouver les valeurs entières de x, positives ou négatives qui satisfont simultanément aux deux inégalités :

$$3x+\frac{5}{21}<2x+1\qquad \text{et}\qquad 4x+\frac{3}{2}>2x-7.$$

138. Trouver les valeurs de x satisfaisant à la fois aux deux inégalités :

$$5x-\frac{2}{3}>\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\qquad \text{et}\qquad 2(x-4)>\frac{3x-14}{2}.$$

139. Quelles valeurs peut-on donner à x pour satisfaire aux deux conditions :

$$8x-5>\frac{15x}{2}-4\quad ;\quad 2x-3>\frac{5x}{2}-\frac{3}{8}\ ?$$

140. Résoudre l'inégalité :

$$ax+5>x-3.$$

141. Résoudre l'inégalité :

$$\frac{x-1}{2x+3}>1.$$

SYSTÈMES A DEUX INCONNUES

142. Résoudre le système :

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=\frac{1}{4}\quad ,\quad \frac{4x}{3}-\frac{2y}{5}=\frac{3x}{4}+\frac{19y}{40}.$$

143. Résoudre le système :

$$\frac{5x-1}{6}+\frac{4y-5x}{10}=\frac{3y-8x}{4}-\frac{29}{300}\quad ,$$
$$\frac{y-1}{2}+\frac{3-2y}{5}-\frac{x-8}{11}=\frac{138}{100}.$$

144. Résoudre le système :

$$\frac{x+y}{4}+\frac{x-y}{2}=3 \quad , \quad \frac{12x-7y}{13}=3.$$

145. Résoudre le système :

$$\frac{7x+6}{11}+y-16=\frac{5x-13}{2}-\frac{8y-x}{5} \quad , \quad 3(3x+4)=10y-15.$$

146. Trouver la fraction $\frac{x}{y}$, sachant que

$$\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{x}{y+1}=\frac{1}{4}.$$

147. Résoudre le système :

$$x+ay=b \quad , \quad y-ax=c.$$

148. Résoudre le système :

$$bx+ay=2ab \quad , \quad ax+by=a^2+b^2.$$

149. Quelle relation doit-il y avoir entre les coefficients de deux équations du premier degré à deux inconnues pour que la valeur de l'une des inconnues soit double de l'autre?

150. A quelles conditions doivent satisfaire les nombres l, m, p pour que les 3 équations

$$x-ly-p=0 \quad , \quad y-lx-m=0 \quad , \quad px+my-1=0$$

puissent être vérifiées par un même système de valeurs de x et y.

151. Discuter, pour toutes les valeurs attribuées à t, le système des équations :

$$(t+2)x+ty=1 \quad , \quad -3x+(t-2)y=-1.$$

152. Résoudre les équations

$$(24m^2+8m+1)x+(15m^2+8m+1)y+3m^2=0;$$
$$(8m+2)x+(5m+1)y-m=0.$$

m étant un nombre donné ; déterminer les valeurs de m pour lesquelles ces équations forment un système indéterminé ou impossible.

153. Résoudre le système :

$$x+ty=\frac{t^3+t+1}{t^2-1} \quad . \quad tx+y=\frac{2t^2+1}{t^2-1},$$

et dire pour quelles valeurs de t ce système est impossible ou indéterminé.

154. Résoudre et discuter le système :

$$(a-1)^2x+(a^2-1)y=(a+1)^2 \quad , \quad (2a-1)x+(a+1)y=a^2-1.$$

155. Résoudre le système d'équations :

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=m,$$
$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=n.$$

156. Résoudre le système :

$$\frac{x+y}{a+b}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}+\frac{x-y}{a-b},$$

$$\frac{x}{a+b}=\frac{y}{a-b}-\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

157. Résoudre le système :

$$m(x+y)+m^2(2x-3y-2)=m+3,$$
$$(m-m^2)x+m(y-1)=2m^2(x-y)-3m^2-2.$$

(*École des Beaux-Arts.*

158 Résoudre le système d'équations :

$$(a+b)x+(a-b)y=2ab,$$
$$(a+c)y+(a-c)x=2ac.$$

159. Résoudre le système :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{x}{c},$$

$$\frac{y}{a}+\frac{x}{b}=1+\frac{y}{c}.$$

160. Résoudre le système d'équations :

$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a-b},$$

$$\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a+b}.$$

SYSTÈMES A PLUSIEURS INCONNUES

161. Résoudre :

$$12x+7y=109,\qquad 5y-2z=0,\qquad 3z+4x=13.$$

162. Résoudre :

$$7x-2y+3z=62,\qquad 3x+8y=48,\qquad 5x-2y=34.$$

163. Résoudre :

$$3x+4y+2z=47,\qquad 5x-3y+7z=41,\qquad 7x-2y-5z=24.$$

164. Résoudre :

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=36,\qquad \frac{x}{15}+\frac{y}{20}+\frac{z}{9}=10,\qquad \frac{x}{2}+\frac{y}{10}+\frac{z}{4}=43.$$

165. Résoudre le système :

$$\frac{2x+3y-4z}{x+5}=\frac{3x+4y-2z}{5x}=\frac{4x+2y-3z}{4x-1}=\frac{x+y-z}{6}.$$

166. Résoudre le système :

$$3x+2y-z=a+1, \quad 5x+3y-2z=2a-1,$$
$$2x-y+3z=-a.$$

167. Résoudre le système :

$$x+2(y+z)=c, \quad y+2(z+x)=b, \quad z+2(x+y)=a$$

168. Résoudre le système :

$$x+y+z=0.$$
$$(b+c)x+(a+c)y+(a+b)z=0,$$
$$bcx+acy+abz=1.$$

169. Discuter le système d'équations :

$$mx+y+z=m, \quad mx+my+z=1,$$
$$x+my+mz=1, \quad x+y+mz=m,$$

suivant les valeurs attribuées à m; cas d'impossibilité ou d'indétermination.

170. Résoudre le système d'équations :

$$kx+5y+4z=46, \quad 5x+ky+3z=38, \quad x+y+z=12,$$

et indiquer les valeurs de k pour lesquelles ce système est impossible ou indéterminé.

171. Résoudre le système :

$$ax+y+z=a^2, \quad x+ay+z=3a, \quad x+y+az=2.$$

Pour quelles valeurs de a ce système est-il impossible ou admet-il une infinité de solutions?

172. Résoudre le système d'équations :

$$x+y+z=a+b+c,$$
$$bx+cy+az=cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2;$$

mettre la valeur des inconnues sous forme entière.

173. Résoudre le système d'équations :

$$x+y+z=0,$$
$$\frac{a^2x}{a-d}+\frac{b^2y}{b-d}+\frac{c^2z}{c-d}=0,$$
$$\frac{ax}{a-d}+\frac{by}{b-d}+\frac{cz}{c-d}=(a-b)(b-c)(c-a).$$

Cas particulier où $b=c$; dire si le système est alors déterminé.

174. Résoudre le système :

$$3x-2y=6, \quad 5y-3z=9, \quad 4z-3t=5, \quad 20t-3x=8.$$

175. Résoudre :

$$2x-3y+2t=4, \quad 5y-2z=4,$$
$$5x+3z=14, \quad x-4y+3t=5.$$

176. Résoudre :

$$x+y-z=a-1, \qquad y+z-u=2a-8, \qquad z+u-v=a+4,$$
$$u+v-x=6a+2, \qquad v+x-y=5a+3.$$

177. Des équations :

$$x=by+cz+du, \qquad y=ax+cz+du,$$
$$z=ax+by+du, \qquad u=ax+by+cz,$$

déduire la relation

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{d}{d+1}=1.$$

178. Résoudre le système :

$$ax=by=cz=du,$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=\frac{1}{m}.$$

179. Résoudre le système :

$$x+2y+3z+4t=a$$
$$y+2z+3t+4x=b$$
$$z+2t+3x+4y=c$$
$$t+2x+3y+4z=d$$

180. Montrer que les équations :

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right)$$
$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{y}{b}\right)$$
$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=l\left(1-\frac{y}{b}\right)$$
$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{1}{l}\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

sont vérifiées par un même système de valeurs de x, y, z. Déterminer ces valeurs.

CHAPITRE V

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ, FONCTION LINÉAIRE

§ 1. — Problèmes numériques à une inconnue.

179. — Définitions. — Rappelons d'abord ce que nous avons déjà dit au n° **7**.

Résoudre un problème, *c'est calculer certaines quantités qu'on appelle* **les inconnues**, *connaissant d'autres quantités appelées* **données** *et sachant qu'il existe entre les données et les inconnues certaines relations.*

Énoncer *le problème, c'est exprimer, en langage ordinaire, les relations qui existent entre les données et les inconnues.*

Résoudre *le problème, c'est trouver les valeurs des inconnues qu'on appelle* **solutions.**

Ainsi, lorsque je dis :

Trouver un nombre qui, divisé par 3, *diminue de* 30,

j'*énonce* un problème. Les *données* sont 3 et 30. L'*inconnue* est le nombre cherché. *Résoudre* ce problème, c'est trouver ce nombre qui sera la *solution.*

Avant de donner des conseils et des règles pour la résolution des problèmes, nous traiterons quelques exemples.

180. — PROBLÈME I. — *Trouver un nombre qui, divisé par* 3, *diminue de* 30.

Désignons par x le nombre cherché. Son quotient par 3 est $\frac{x}{3}$.

Si x est le nombre cherché, $\frac{x}{3}$ doit être égal à $x-30$, on doit donc avoir

$$\frac{x}{3}=x-30.$$

Réciproquement tout nombre x qui vérifie cette équation est une solution.

On obtiendra donc la ou les solutions en résolvant cette quation du premier degré.

Chassons les dénominateurs, il vient :

$$x = 3x - 90$$

ou

$$2x = 90,$$

$$x = 45.$$

Le nombre cherché est 45.

181. — Problème II. — *Un père a 30 ans; son fils a 4 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il double de l'âge du fils?*

Désignons par x le nombre d'années cherché. Dans x années l'âge du père sera $30 + x$ et l'âge du fils sera $4 + x$.

Si x est bien le nombre cherché, l'âge du père $30 + x$ devra être égal à 2 fois l'âge du fils $4 + x$. On devra donc avoir

$$30 + x = 2(4 + x).$$

Réciproquement le nombre x qui vérifie cette équation répondra à l'énoncé, ce sera donc la solution.

Il nous faut résoudre cette équation du premier degré qui s'écrit :

$$30 + x = 8 + 2x$$

d'où

$$2x - x = 30 - 8$$

ou

$$x = 22.$$

C'est donc dans 22 ans que l'âge du père sera double de celui du fils. En effet, le père aura alors $30 + 22 = 52$ ans et le fils aura $4 + 22 = 26$ ans.

182. — Mise en équations. — Ces deux exemples nous suffisent pour voir quelle est la marche générale qu'il faut suivre pour résoudre un problème :

Après avoir désigné les inconnues par des lettres x, y..., on écrit, d'après les indications de l'énoncé, les égalités qui permettraient de **vérifier** *les valeurs x, y... des inconnues* **si elles étaient connues**.

Les égalités que l'on obtient ainsi sont les **équations du problème** *et il ne reste plus qu'à résoudre ces équations pour avoir les solutions.*

Un problème est dit *du premier degré* lorsqu'il ne conduit qu'à la résolution d'équations du *premier degré*.

183. — Choix des inconnues. — Généralement, l'énoncé même du problème indique quelles sont les inconnues.

Ainsi, dans le problème I, l'énoncé dit : « *trouver un nombre qui...* ». Il est clair que l'inconnue est ce nombre.

Mais il arrive quelquefois que l'énoncé ne précise pas exactement quelles sont les inconnues. Dans ce cas, *il faut prendre pour inconnues des quantités telles que leur connaissance suffise à fixer sans ambiguïté le résultat cherché.*

Ainsi, j'aurais pu énoncer le problème II de la façon suivante :

Un père a 30 ans; son fils a 4 ans. Peut-il arriver qu'à un certain moment l'âge du père soit double de celui du fils?

Ici, l'inconnue n'est pas précisée. On aurait alors pu prendre pour inconnue diverses quantités; soit, ce que nous avons fait, *le nombre d'années* au bout desquelles l'âge du père sera double de celui du fils; soit *l'âge qu'aura le père* au moment cherché ; soit *l'âge qu'aura le fils* à ce moment.

Toutes ces inconnues auraient été également bonnes.

Reprenons ce problème en prenant l'âge du père comme inconnue x. Il suffit de remarquer que le fils a 26 ans de moins que le père. L'âge du fils sera alors $x-26$ et on aura l'équation

$$x = 2\,(x - 26)$$

qui donne $$x = 52.$$

Cependant le choix des inconnues ne doit pas être fait au hasard, et il faut toujours donner la préférence aux inconnues grâce auxquelles la mise en équations est *la plus simple possible.*

Nous verrons, plus loin, qu'il faut encore prendre des précautions lorsque les inconnues sont susceptibles d'être comptées dans des sens différents.

Appliquons ces généralités à des exemples.

184. — PROBLÈME III. — *Trouver un nombre entier de deux chiffres sachant que le chiffre des dizaines est le double du chiffre des unités et que lorsqu'on intervertit les deux chiffres le nombre diminue de* 27.

Ici on ne peut pas prendre comme inconnue le nombre entier cherché, car en réalité, il y a deux inconnues qui sont les deux chiffres du nombre cherché. D'ailleurs, lorsqu'on connaît le chiffre des unités, on connaît immédiatement celui des dizaines. On peut donc prendre comme unique inconnue x le chiffre des unités. Celui des dizaines est alors $2x$.

Le nombre cherché est alors $2x \times 10 + x = 21x$.

Le nombre obtenu en intervertissant les chiffres est : $x \times 10 + 2x = 12x$.

En écrivant l'égalité qui doit être vérifiée d'après l'énoncé, on a l'équation :

$$21x - 12x = 27,$$

$$9x = 27,$$

d'où
$$x = \frac{27}{9} = 3.$$

Le chiffre des unités est 3; celui des dizaines est 6.

Le nombre cherché est 63.

185. — Problèmes impossibles. — Un problème peut être *impossible* pour deux raisons :

1° *Il peut arriver que les équations auxquelles on parvient n'aient pas de solution;*

2° *Il peut arriver que les équations, ayant des solutions, ces solutions ne conviennent cependant pas à l'énoncé, parce*

que les quantités que l'on cherche doivent satisfaire à certaines conditions restrictives.

Ainsi, par *exemple*, dans le problème III, l'inconnue x était un *chiffre*. La solution n'était donc acceptable qu'à condition qu'elle soit un nombre *entier*, *positif et plus petit que* 10.

Donnons quelques exemples de ce genre de problèmes.

186. — PROBLÈME IV. — *Trouver un nombre dont la moitié diminuée du tiers et augmentée de* 12, *soit égale au sixième de ce nombre augmenté de* 4.

Soit x le nombre cherché.

D'après l'énoncé, on doit avoir :

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+12=\frac{x}{6}+4,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$3x-2x+72=x+24,$$

ou

$$3x-2x-x=24-72,$$

ou

$$0.x=-48.$$

Cette équation *n'a pas de solution*. Le problème proposé est donc *impossible*.

187. — PROBLÈME V. — *Une personne a payé* 50 *francs avec* 8 *pièces d'argent de* 5 *francs et de* 2 *francs. Combien a-t-elle donné de pièces de* 5 *francs et combien de pièces de* 2 *francs?*

Désignons par x le nombre des pièces de 2 francs.

Le nombre des pièces de 5 francs sera $8-x$.

La somme payée sera alors $5(8-x)+2x$ *francs*; d'après l'énoncé cette somme doit être 50 francs, on doit donc avoir

$$5(8-x)+2x=50,$$

ou

$$40-5x+2x=50.$$

En résolvant, on trouve :

$$x=-\frac{10}{3}.$$

La valeur de x est *fractionnaire et négative*; or, d'après la nature même de la question, la valeur de x doit être *positive, entière et au plus égale à* 8. Le problème *n'a donc pas de solution.*

REMARQUE. — Le problème aurait eu une solution si, par exemple, la somme payée était : 31 francs.

On aurait alors :

$$40 - 5x + 2x = 31$$

d'où

$$x = 3.$$

Le nombre des pièces de 2 francs serait 3 et le nombre des pièces de 5 francs serait $8 - 3 = 5$.

§ 2. — Solutions négatives, discussions.

188. — Solutions négatives qui s'interprètent. — Lorsqu'en résolvant un problème qui, d'après sa nature, ne doit admettre que des solutions positives, on trouve une solution négative, c'est que le problème est impossible.

C'est, par exemple, ce qui s'est présenté dans le problème V.

Mais, dans certains cas, lorsque l'inconnue est une grandeur susceptible d'être comptée dans deux sens opposés : un temps, une distance, une somme d'argent qui peut être gagnée ou perdue, il peut arriver que la solution négative puisse *s'interpréter.*

Il peut arriver que le signe (—) qui se trouve devant l'inconnue indique que l'on doit compter cette inconnue dans le sens opposé à celui dans lequel elle est comptée dans l'énoncé.

Pour vérifier si cette interprétation est bien exacte, voici ce qu'il faut faire :

On choisit comme sens positif pour l'inconnue le sens dans lequel elle est comptée dans l'énoncé et on désigne par x la mesure algébrique de cette inconnue.

On met de nouveau le problème en équation en ayant soin de le faire d'une façon générale en appliquant les théorèmes du chapitre II.

Si la solution négative s'interprète, la nouvelle équation doit être identique à celle obtenue précédemment.

Traitons quelques exemples.

189. — Problème VI. — *Un père a* 60 *ans, son fils a* 34 *ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il double de celui du fils?*

Soit x le nombre d'années. L'énoncé donne :

$$60 + x = 2(34 + x).$$

On en tire $$x = -8.$$

D'après l'énoncé *tel qu'il est posé* la valeur de x devrait être positive; mais, comme il s'agit d'un temps, le signe (—) pourrait peut-être signifier que c'était *il y a* 8 *ans* que le père *avait* l'âge double de celui de son fils.

Pour le voir, supposons que x soit un nombre positif ou négatif, suivant que le moment cherché suit ou précède l'instant actuel.

L'âge du père à l'instant x sera *dans tous les cas* $60 + x$, celui du fils sera $34 + x$, on parvient donc à la *même* équation que plus haut

$$60 + x = 2(34 + x).$$

La solution négative s'interprète donc bien. C'est : *il y a* 8 *ans* que le père, qui avait alors $60 - 8 = 52$ ans, avait un âge double de celui de son fils, qui avait alors $34 - 8 = 26$ ans.

190. — Problème VII. — *Deux courriers partent ensemble de deux points* A *et* B *d'une même route et marchent tous deux dans le sens de* A *vers* B. *Le premier courrier marche à* 15 *kilomètres à l'heure et part de* A; *le second courrier marche à* 18 *kilomètres à l'heure et part de* B. *A quelle dis-*

tance de B *se rencontrent-ils, sachant que la distance* A B *est de* 42 *kilomètres?*

Soit x la distance cherchée, en kilomètres. Le premier courrier aura parcouru $x + 42$ kilomètres et aura mis $\frac{x+42}{15}$ heures pour l'effectuer. Le second courrier a parcouru la distance x et aura mis $\frac{x}{18}$ heures. Lorsque les courriers se rencontreront on devra avoir :

$$\frac{x+42}{15} = \frac{x}{18}$$

ou

$$6x + 252 = 5x.$$

On en tire :

$$x = -252.$$

La valeur trouvée pour x est négative. La rencontre n'a donc pas pu avoir lieu *après* le point B.

On est conduit à se demander si la rencontre n'avait pas pu avoir lieu *avant* B, en supposant que les deux courriers suivaient toujours la route dans le même sens et marchaient tous deux avant de passer en A et B.

Modifions donc l'énoncé de la façon suivante :

Deux courriers marchent sur une même route dans le sens de A *vers* B. *Le premier courrier fait* 15 *kilomètres à l'heure; le second courrier fait* 18 *kilomètres à l'heure. Lorsque le premier courrier a passé en* A *le second courrier était en* B. *A quelle distance de* B *les deux courriers se sont-ils rencontrés, sachant que la distance* AB *est de* 42 *kilomètres?*

Dans ce nouvel énoncé on ne suppose rien sur le point de rencontre des deux courriers, on ne dit pas s'ils se sont rencontrés avant ou après B.

Prenons alors, sur la route, comme sens positif le sens de A vers B et désignons par x la distance du point B au point de rencontre M, cette distance étant comptée posi-

tivement dans le sens AB et négativement dans le sens contraire.

Prenons pour inconnue le segment $\overline{BM} = x$.

Le segment $\overline{AM}$ est égal en grandeur et en signe à

$$\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = 42 + x.$$

D'après la formule (2) du n° **99**, le temps écoulé à partir du passage des courriers en A et B sera $\frac{42+x}{15}$ pour le premier et $\frac{x}{18}$ pour le second. On aura donc :

$$\frac{42+x}{15} = \frac{x}{18}.$$

C'est la *même* équation que plus haut.

La solution négative $x = -252$ *s'interprète* :

La rencontre *avait* eu lieu 252 kilomètres *avant* le point B.

191. — Cas général. — D'après les exemples que nous venons de traiter, nous voyons que chaque fois que nous avons pu *interpréter* une solution négative, cela tenait à ce que le problème était *mal posé*. Cela tenait à ce qu'on avait fait par avance dans l'énoncé une supposition sur le sens de l'inconnue, supposition qui se trouvait être inexacte.

Lorsqu'un problème de ce genre est *bien posé*, on ne doit faire dans l'énoncé aucune supposition sur le sens de l'inconnue. On peut alors *de suite* affecter l'inconnue d'un sens et d'un signe et éviter de refaire une seconde fois le problème.

Nous sommes ainsi amenés à la règle générale que voici :

Lorsque, dans un problème, l'inconnue peut être comptée dans deux sens opposés, on doit de suite **choisir un sens positif** *pour cette inconnue et désigner par x la* **mesure algébrique** *de l'inconnue.*

Il faut ensuite avoir soin de mettre le problème en équation d'une façon tout à fait générale, de façon que l'équation soit bonne dans tous les cas.

La solution trouvée a alors toujours un sens.

192. — Problème VIII. — *Un joueur entre au jeu avec* 200 *francs. Il joue deux parties. A la première partie il gagne le double de ce qui lui reste à la fin de la seconde partie. A la seconde partie il perd* 300 *francs. Quelle somme a-t-il gagnée ou perdue?*

Soit x le nombre de francs gagnés ou perdus, x étant positif si c'est un gain et négatif si c'est une perte.

Il lui reste à la fin des deux parties $200 + x$ francs.

D'autre part, à la première partie, il gagne $2(200 + x)$ francs. Il a donc à la fin de cette première partie $200 + 2(200 + x)$ francs. Il perd 300 francs à la seconde partie. Il lui reste donc finalement $200 + 2(200 + x) - 300$. On doit ainsi avoir :

$$200 + 2(200 + x) - 300 = 200 + x$$

ou $$200 + 400 + 2x - 300 = 200 + x.$$

D'où $$x = -100.$$

Le joueur a *perdu* 100 francs.

193. — Discussions. — Lorsque les données d'un problème, au lieu d'être des nombres, sont représentées par des lettres, la solution trouvée est une *expression algébrique* de ces lettres. La valeur numérique de l'inconnue dépend alors des valeurs numériques des inconnues.

***Discuter** un tel problème, c'est alors étudier, suivant les valeurs attribuées aux données :* 1° *si le problème admet une solution acceptable;* 2° *quelle est la nature du résultat.*

Nous nous contenterons d'examiner ici des cas très simples.

194. — PROBLÈME IX. — *Étant donnés sur un axe deux points* A *et* B, *trouver un point* M *tel que l'on ait :*

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = k,$$

k étant un nombre donné.

Cette question est au fond le problème inverse de celui étudié au § 4 du chapitre II.

Prenons sur la droite AB (fig. 15) comme sens positif le sens de A vers B et désignons le segment $\overline{AB}$ par a, qui est alors un nombre positif.

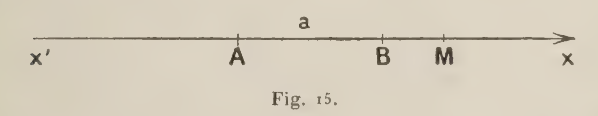


Fig. 15.

Prenons pour inconnue le segment $\overline{AM} = x$. On a toujours (n° **80**) :

$$\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = x - a$$

et l'on a :

$$\frac{x-a}{x} = k$$

ou

$$x - a = kx$$

et, enfin,

$$(1) \qquad x(1-k) = a$$

Discussion. — Pour que cette équation (1) ait une solution, il faut d'abord que $1-k$ ne soit pas nul, c'est-à-dire que k *soit différent* de 1.

S'il en est ainsi, il y a une solution qui est :

$$(2) \qquad x = \frac{a}{1-k}.$$

Il nous reste à savoir quelle est la position du point M, et, pour cela, il nous faut savoir si x est positif ou négatif et, lorsqu'il est positif, s'il est plus grand ou plus petit que a.

Si $k > 1$, x est négatif, le point M est (fig. 15) dans la région x'A de l'autre côté de A que B.

Si $0 < k < 1$, x est positif, mais plus grand que a, car son dénominateur est plus petit que 1.

Le point M est dans la région Bx au delà de B.

Si $k < 0$, x est positif, mais plus petit que a; M est entre A et B.

Pour $k = 0$, on a $x = a$. M est en B.

Résumé. —

$k < 0$	$0 < x < a$	M entre A et B;
$k = 0$	$x = a$	M en B;
$0 < k < 1$	$x > a$	M au delà de B;
$k = 1$	pas de solution;	
$k > 1$	$x < 0$	M avant A.

195. — Problème X. — *Un rectangle a une base de 10 mètres et une hauteur de 5 mètres. De quelle longueur faut-il allonger ou raccourcir la base pour que la surface du rectangle devienne égale à S?*

Soit x la longueur cherchée, x étant *positif* lorsqu'il faut *allonger* la base et *négatif* lorsqu'on la *raccourcit*. Dans tous les cas, après l'opération, la base sera $10 + x$ et on devra avoir :

$$(10 + x)\,5 = S$$

ou

$$50 + 5x = S.$$

On en tire :

$$x = \frac{S - 50}{5}.$$

Discussion. — Reconnaissons d'abord le signe de x.

Si $S > 50$, x est positif; il faut *allonger* la base.

Si $S < 50$, x est négatif; il faut *raccourcir* la base.

Mais, comme la base n'a que 10 mètres, il faut encore que x, lorsqu'il est négatif, soit plus petit en valeur absolue que 10. En d'autres termes, il faut que x soit plus grand que -10. On doit donc avoir :

$$\frac{S - 50}{5} > -10,$$

ou $$S - 50 > - 50,$$
ou $$S > 0,$$
ce qui a toujours lieu.

La solution trouvée est *toujours acceptable*.

Dans le cas particulier où $S = 50$, on trouve $x = 0$, ce qui était à prévoir, car la surface du rectangle donné est égale à 50.

196. — PROBLÈME XI. — *Trouver un nombre tel que la somme des racines carrées des deux nombres obtenus en l'augmentant et le diminuant de* 1 *soit égale à un nombre donné* a.

Soit x ce nombre. D'après l'énoncé on doit avoir :

(1) $$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = a.$$

Pour résoudre cette équation, isolons le premier radical; il vient :

(2) $$\sqrt{x+1} = a - \sqrt{x-1}.$$

Élevons les deux membres au carré et nous avons :

$$x + 1 = a^2 - 2a\sqrt{x-1} + x - 1.$$

Isolons le second radical :

(3) $$2a\sqrt{x-1} = a^2 - 2.$$

Élevons de nouveau les deux membres au carré et il vient :

$$4a^2(x-1) = a^4 - 4a^2 + 4$$

ou $$4a^2x = a^4 + 4$$

$$x = \frac{a^4+4}{4a^2}.$$

Discussion. — Comme nous avons élevé deux fois au carré, nous avons pu introduire des solutions étrangères. Il faut donc vérifier si cette valeur de x satisfait bien à l'équation donnée (1) ou à l'équation équivalente (2). Pour

cela il faut d'*abord* qu'elle vérifie l'équation (3). Or, elle vérifiera soit cette équation (3), soit l'équation

$$(4) \qquad -2a\sqrt{x^2-1}=a^2-2.$$

Pour distinguer celle des deux équations (3) ou (4) qui est vérifiée il n'y a qu'à regarder le signe de $\dfrac{a^2-2}{2a}$.

Si $\dfrac{a^2-2}{2a}$ est *positif* il ne peut être égal qu'à $+\sqrt{x^2-1}$ et non pas à $-\sqrt{x^2-1}$, c'est donc l'équation (3) qui est vérifiée.

Si $\dfrac{a^2-2}{2a}$ est *négatif* c'est le contraire qui a lieu et c'est l'équation (4) qui est vérifiée.

Il faut donc d'abord avoir

$$\frac{a^2-2}{2a}>0.$$

Cette condition étant remplie la valeur de x vérifie bien l'équation (3) et on a

$$\sqrt{x-1}=\frac{a^2-2}{2a}.$$

Pour qu'alors x vérifie l'équation (2) il faut avoir

$$\sqrt{x+1}=a-\frac{a^2-2}{2a}=\frac{a^2+2}{2a}.$$

Or, comme on a élevé au carré, ici encore x vérifiera soit cette équation, soit l'équation

$$\sqrt{x+1}=-\frac{a^2+2}{2a}.$$

Pour que ce soit la première qui soit vérifiée il faut et il uffit alors que $\dfrac{a^2+2}{2a}$ soit *positif*. Comme a^2+2 est certainement positif ceci exige que a soit positif. Mais alors

la condition

$$\frac{a^2-2}{2a}>0$$

se réduit à $$a^2-2>0$$

ou $$a^2>2$$

ou $$a>\sqrt{2}.$$

En *résumé*,

Si $a \geqslant \sqrt{2}$, le problème a une solution.

Si $a < \sqrt{2}$, le problème n'a pas de solution.

§ 3. — Problèmes à plusieurs inconnues.

197. Généralités. — La mise en équations et la résolution des problèmes à plusieurs inconnues se fait de la même façon que dans le cas d'une seule inconnue (nos **182** et **191**).

On désigne par x, y, z,... les inconnues et on écrit les relations qui permettraient de vérifier les valeurs de x, y, z... si elles étaient connues.

On a ainsi les équations du problème. Il ne reste plus qu'à les résoudre et à discuter la solution s'il y a lieu.

198. — Remarque importante. — Nous remarquerons cependant que, pour que le problème admette un nombre *limité* de solutions, il faut qu'il y ait *exactement autant d'équations que d'inconnues.*

199. — Lorsqu'il y a moins d'équations que d'inconnues le problème est en général *indéterminé*, il y a une *infinité* de solutions.

Cherchons, par exemple, deux nombres x et y tels que l'on ait :

$$5x+3y=8.$$

Il y a *deux* inconnues et *une seule* équation. Il est facile de voir qu'il y a une *infinité* de solutions. L'équation s'écrit, en effet, sous la forme équivalente

$$x=\frac{8-3y}{5}.$$

On peut alors donner à y une valeur *arbitraire*, il en résultera toujours une valeur pour x. Par exemple :

$$\text{pour } y = 0 \quad , \quad x = \frac{8}{5} ;$$
$$\text{»} \quad y = 1 \quad , \quad x = 1 ;$$
$$\text{»} \quad y = -1 \quad , \quad x = \frac{11}{5} ;$$
$$\text{»} \quad y = \frac{1}{3} \quad , \quad x = \frac{7}{5} ;$$

et ainsi de suite.

200. — Lorsqu'il y a plus d'équations que d'inconnues le problème est, en général, *impossible*; il n'y a pas de solution.

Cherchons, par exemple, *deux* nombres x et y vérifiant les *trois* équations

$$5x - 3y = 12,$$
$$2x + y = 7,$$
$$4x - 2y = 3.$$

Si on résout les *deux premières* équations, on trouve que les *seules* valeurs de x et de y qui les vérifient sont : $x = 3$, $y = 1$.

Or, si on fait $x = 3$, $y = 1$ dans la troisième équation, on constate *qu'elle n'est pas vérifiée*, car on trouve

$$10 = 3.$$

Il n'y a donc pas de solution, puisque *les seules* valeurs de x et y, qui vérifient les deux premières équations, ne vérifient pas la dernière.

201. — Problème XII. — *Trouver deux nombres dont la différence et le quotient soient tous deux égaux à* 5.

Soient x et y ces deux nombres. On doit avoir

$$x - y = 5,$$
$$x = 5y.$$

Remplaçons x par $5y$ dans la première équation et il vient :

$$4y = 5,$$

d'où

$$\begin{cases} y = \dfrac{5}{4}, \\ x = 5 \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{25}{4}. \end{cases}$$

202. — GÉNÉRALISATION. — *Trouver deux nombres dont la différence et le quotient soient tous deux égaux à* a.

x et y étant ces deux nombres, on doit avoir :

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x = ay. \end{cases}$$

Portons la valeur de x dans la première. Il vient :

$$(1) \qquad ay - y = a,$$

$$y = \frac{a}{a-1}, \qquad \text{si } a \neq 1,$$

et

$$x = \frac{a^2}{a-1}.$$

Lorsque $a \neq 1$, le problème a toujours une solution.

Lorsque $a = 1$ l'équation (1) devient

$$0 = 1;$$

le problème n'a pas de solution.

203. — PROBLÈME XIII. — *Lorsqu'on augmente de* 5 *les deux termes d'un rapport, ce rapport devient égal à* $\frac{9}{11}$. *Lorsqu'on diminue, au contraire, les deux termes de* 5, *le rapport devient égal à* $\frac{2}{3}$. *Quels sont les deux termes du rapport?*

Soit $\frac{x}{y}$ le rapport. On a, d'après l'énoncé,

$$\frac{x+5}{y+5} = \frac{9}{11},$$

$$\frac{x-5}{y-5} = \frac{2}{3},$$

ce qui donne les deux équations.

$$\begin{cases} 11x + 55 = 9y + 45, \\ 3x - 15 = 2y - 10. \end{cases}$$

ou
$$\begin{cases} 11x - 9y = -10, \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Éliminons y (nº **166**). Il vient :

$$5x = 65, \qquad x = 13.$$

Éliminons x et il vient :

$$5y = 85, \qquad y = 17.$$

Le rapport cherché est $\frac{13}{17}$.

204. — Problème XIV. — *Deux courriers* A *et* B *partent de deux villes distantes de* 46 *lieues et vont à la rencontre l'un de l'autre. Lorsque* A *part* $5^h\,3/4$ *avant* B, *leur rencontre a lieu* $6^h\,1/8$ *après le départ de* B. *Mais lorsque* B *part* $5^h\,3/4$ *avant* A, *leur rencontre a lieu* $5^h\,5/8$ *après le départ de* A. *Quelles sont les vitesses de* A *et* B?

Soit x la vitesse de A, y la vitesse de B, en lieues à l'heure.

Dans le premier cas, A marche pendant $5^h\,3/4 + 6^h\,1/8$, soit pendant $11^h\frac{7}{8}$; il fait donc $x\left(11 + \frac{7}{8}\right)$ lieues. De son côté, B ne marche que pendant $6^h\,1/8$; il fait dont $y\left(6 + \frac{1}{8}\right)$ lieues.

La somme des distances parcourues par ces deux courriers est de 46 lieues.
On a donc :

$$x\left(11 + \frac{7}{8}\right) + y\left(6 + \frac{1}{8}\right) = 46.$$

Dans le second cas, A marche pendant $5^h\,5/8$; il fait donc $x\left(5 + \frac{5}{8}\right)$ lieues, tandis que B marche pendant $5^h\,3/4 + 5^h\,5/8$, soit pendant $11^h\,\frac{3}{8}$; il fait donc $y\left(11 + \frac{3}{8}\right)$ lieues.

En écrivant que la somme des distances parcourues est de 46 lieues, on obtient :

$$x\left(5+\frac{5}{8}\right)+y\left(11+\frac{3}{8}\right)=46.$$

Chassons les dénominateurs et nous avons les deux équations :

$$\begin{cases} 95x+49y=368, \\ 45x+91y=368. \end{cases}$$

En résolvant, on trouve :

$$x=\frac{12}{5}, \qquad y=\frac{20}{7}.$$

Le courrier A fait donc 2 *lieues* 2/5 à l'heure.
Le courrier B fait 2 *lieues* 6/7 à l'heure.

205. — Problème XV. — *Partager* 232 *en trois parties telles que si on ajoute à la première la demi-somme des deux autres, qu'on ajoute à la seconde le tiers de la somme des deux autres et qu'on ajoute à la troisième le quart de la somme des deux autres, les trois sommes ainsi obtenues soient égales.*

Soient x, y, z les trois nombres.
D'après l'énoncé on a :

$$x+y+z=232,$$

$$x+\frac{y+z}{2}=y+\frac{x+z}{3}=z+\frac{x+y}{4}.$$

Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} x+y+z=232, \\ 4x-3y+z=0, \\ 3x+y-2z=0. \end{cases}$$

En résolvant, on trouve :

$$x=40, \qquad y=88, \qquad z=104.$$

Ce sont les nombres cherchés.

§ 4. — Variation de la fonction linéaire.

206. — Variables. — On dit qu'une quantité est *variable* lorsqu'elle peut prendre diverses valeurs, lorsqu'elle peut *varier*.

Une variable est dite *indépendante* lorsqu'on peut lui donner n'importe quelle valeur, positive ou négative, aussi grande ou aussi petite qu'on le voudra. En d'autres termes, une variable est indépendante lorsque les valeurs qu'elle peut prendre ne dépendent de rien autre.

Nous désignerons, en général, une variable indépendante par la lettre x.

207. — Fonctions. — Une quantité variable est dite *fonction* d'une autre variable indépendante lorsque sa valeur *dépend* de celle de la variable indépendante.

Une variable qui est fonction d'une autre est encore appelée variable *dépendante* de cette autre.

Par exemple, la longueur de la circonférence d'un cercle est une *fonction* du rayon de ce cercle ; le chemin parcouru par un mobile qui se meut avec la vitesse de 4 mètres à la seconde *dépend* du temps pendant lequel ce mobile a marché, ce chemin est donc une *fonction* du temps du parcours.

En physique, on rencontre sans cesse des exemples de fonctions. Ainsi, on sait que la longueur d'une barre de fer *varie* avec la température. Quand on chauffe la barre, elle s'allonge ; quand on la refroidit, elle se raccourcit. La longueur d'une barre de fer est donc *fonction* de sa température.

Nous désignerons généralement une variable *dépendante*, une *fonction* par la lettre y.

Dire alors que la variable y est une fonction de la variable indépendante x, c'est dire que l'on connaît, que *l'on sait calculer* la valeur de y quand on connaît la valeur de x.

Ainsi, si le rayon d'un cercle est x, sa longueur y est donnée par la formule

$$y = 2\pi x \text{ où } \pi = 3,1416.$$

Donc lorsqu'on connaît x, on sait calculer y. Par exemple :

pour $x = 1^{m}$, on a $y = 6^{m},2832$,
pour $x = 3^{m}$, on a $y = 18^{m},8496$,

et ainsi de suite.

De même, si on désigne par y le chemin parcouru par un mobile dans le temps x, à la vitesse de 4^{m} à la seconde, on a :

$$y = 4x,$$

formule qui permet de calculer y quand on connaît x :

pour $x = 2^{sec}$, on a $y = 8^{m}$,
pour $x = 3^{sec}$, on a $y = 12^{m}$,
pour $x = 5^{s},2$ on a $y = 20^{m},8$,

et ainsi de suite.

Il résulte de là que :

Lorsqu'une quantité y est* fonction *d'une variable x, il existe une* formule *qui permet de calculer y chaque fois qu'on connaît x.

C'est cette formule qui définit, au point de vue mathématique, la fonction y de la variable x.

208. — Fonction linéaire. — Les plus simples des fonctions sont celles dans lesquelles y est un polynôme du *premier degré* en x.

Ces fonctions sont appelées ***fonctions linéaires.***

Ainsi, l'égalité

$$(1) \qquad y = 4x - 5$$

définit une fonction y de la variable x. La valeur de y *dépend* de celle de x. Quand on connaît la valeur de x on sait calculer celle de y. Or, $4x - 5$ est un polynôme du premier degré en x. La fonction y définie par l'égalité (1) est donc une fonction *linéaire*.

Donc :

On dit que y est une* fonction linéaire *de x lorsque y est égale à un polynôme du premier degré en x, c'est-à-dire lorsque les valeurs de y sont données par une formule de la forme :

$$y = ax + b,$$

***où a et b désignent des nombres fixes donnés, ce qu'on appelle des* constantes.**

Les exemples que nous avons donnés plus haut : la longueur d'une circonférence en fonction du rayon, le chemin parcouru par un mobile en fonction du temps, la longueur d'une barre de fer en fonction de la température, sont des *fonctions linéaires*.

Au contraire, par exemple, l'aire d'un cercle n'est pas une fonction linéaire de son rayon. Car, si on appelle y l'aire du cercle et x son rayon, on a :

$$y = \pi x^2 = 3{,}1416 \cdot x^2$$

y est du *second degré* en x. *Ce n'est donc pas une fonction linéaire.*

209. — Croissance. — *On dit qu'une fonction est* **croissante** *lorsqu'elle varie dans le même sens que la variable dont elle dépend.*

En d'autres termes :

Lorsqu'une fonction est *croissante*, sa valeur *augmente*, *croît*, lorsque la valeur de la variable *augmente*.

Ainsi, la longueur d'une circonférence de cercle est une fonction *croissante* de son rayon, car, quand le rayon augmente, la longueur de la circonférence augmente.

De même, la longueur d'une barre de fer est une fonction *croissante* de la température, car, quand la température s'élève, la barre de fer s'allonge.

210. — Décroissance. — *On dit qu'une fonction est* **décroissante** *lorsqu'elle varie en sens inverse de la variable dont elle dépend.*

En d'autres termes :

Lorsqu'une fonction est *décroissante*, sa valeur *diminue*, *décroît*, lorsque la valeur de la variable *augmente*, *croît*.

Considérons un cylindre plein d'air et fermé par un piston. Quand on presse sur ce piston il s'enfonce, l'air est comprimé et son volume diminue.

Le volume de l'air emprisonné dans le cylindre est donc une *fonction* de la pression exercée sur le piston. Cette fonction est *décroissante* puisque quand la pression augmente le volume diminue.

211. — Remarque. — Il résulte de ce qui précède que pour voir si une fonction est croissante ou décroissante, il suffit de donner à la variable deux valeurs *quel-*

conques et de regarder quelle est la plus grande des deux valeurs correspondantes de la fonction.

Si à la plus grande valeur de la variable correspond *toujours* la plus grande valeur de la fonction, cette fonction est croissante.

Si à la plus grande valeur de la variable correspond, au contraire, *toujours* la plus petite valeur de la fonction, cette fonction est décroissante.

212. — **Théorème I.** — ***La fonction linéaire est croissante ou décroissante suivant que le coefficient de x est positif ou négatif.***

Soit
$$y = ax + b,$$
une fonction linéaire. Donnons à x deux valeurs *absolument quelconques* x' et x'' et supposons que l'on ait

$$x' > x''.$$

Pour ces deux valeurs de x, la fonction y prend deux valeurs correspondantes, y' et y'' :

$$y' = ax' + b,$$
$$y'' = ax'' + b.$$

Nous distinguerons deux cas :

213. — 1° *Supposons* $a > 0$. — On peut alors (n° **70**) multiplier les deux membres de l'inégalité

$$x' > x''$$

par a et on obtient l'inégalité *de même sens* :

$$ax' > ax''.$$

Aux deux membres de cette inégalité on peut ajouter le même nombre b (n° **69**), et il vient :

$$ax' + b > ax'' + b,$$

ce qui exprime que :

$$y' > y''.$$

La fonction est donc, dans ce cas, *croissante*, puisqu'à la plus grande valeur x' de x correspond la plus grande valeur y' de la fonction.

Ainsi, la fonction

$$y = 4x - 3$$

est *croissante*. Donnons à x une série de valeurs croissantes ; nous obtenons pour y la série de valeurs correspondantes qui suivent et qui sont bien croissantes :

pour	$x = -2,$	on a :	$y = -11,$
»	$x = -1,$	»	$y = -7,$
»	$x = 0,$	»	$y = -3,$
»	$x = 1,$	»	$y = 1,$
»	$x = 2,$	»	$y = 5,$
»	$x = 3,$	»	$y = 9;$

et ainsi de suite. Les valeurs -11, -7, -3, 1, 5, 9, etc... de y vont bien en *croissant*.

214. — 2° *Supposons* $a < 0$. — Lorsqu'on multiplie les deux membres de l'inégalité

$$x' > x''$$

par a qui est négatif, l'inégalité *change de sens* (n° **70**) et on a :

$$ax' < ax''.$$

Aux deux membres de cette inégalité, ajoutons le même nombre b (n° **69**) et nous obtenons

$$ax' + b < ax'' + b,$$

ce qui exprime que

$$y' < y''.$$

La fonction, dans ce cas, est donc *décroissante*, puisqu'à la plus grande valeur x' de la variable x correspond la plus petite valeur y' de la fonction y.

Par exemple, la fonction

$$y = 7 - 2x$$

est *décroissante*.

Donnons à x une suite de valeurs croissantes :

pour	$x = -2$,	on a	$y = 11$,
»	$x = -1$,	»	$y = 9$,
»	$x = 0$,	»	$y = 7$,
»	$x = 1$,	»	$y = 5$,
»	$x = 2$,	»	$y = 3$,
»	$x = 3$,	»	$y = 1$,
»	$x = 4$,	»	$y = -1$;

et ainsi de suite. Les valeurs 11, 9, 7, 5, 3, 1, — 1, etc... de y vont bien en *décroissant*.

215. — Théorème II. — ***Pour des valeurs de la variable infiniment grandes, la fonction linéaire est infiniment grande et du signe du terme en x.***

Prenons un exemple numérique.

Considérons, par exemple, la fonction

$$y = \frac{x}{10} - 3.$$

Je dis que pour des valeurs de x très grandes et positives, y est très grand, aussi grand qu'on le voudra, et positif.

Supposons, par exemple, qu'on veuille que y soit plus grand que 1 000 000.

Il suffit pour cela qu'on ait

$$\frac{x}{10} - 3 > 1\,000\,000.$$

C'est une inégalité à résoudre (n° **160**) et on en tire

$$x > 10\,000\,030.$$

Il suffit donc de donner à x une valeur plus grande que 10 000 030 pour que y soit plus grand que 1 million.

On pourrait de même donner à x des valeurs assez grandes pour que y soit plus grand qu'un milliard, qu'un trillion, etc....

Donnons à x des valeurs très grandes et négatives; nous allons voir que y deviendra très grand en valeur absolue mais négatif.

Supposons, par exemple, qu'on veuille que y devienne plus grand que 1 milliard en valeur absolue, mais *négatif*.

Ceci revient à dire que y devra être plus petit que — 1 000 000 000. On devra donc avoir

$$\frac{x}{10} - 3 < -1\,000\,000\,000.$$

D'où on tire

$$x < -9\,999\,999\,970.$$

Il suffit donc que x soit *en valeur absolue* plus grand que 9 999 999 970 et *négatif* pour que y soit négatif et plus grand en valeur absolue qu'un milliard.

216. — Nous avons pris dans l'exemple précédent une fonction linéaire dans laquelle le coefficient de x est positif. L'inverse aurait lieu si le coefficient de x était négatif.

Si nous considérons, par exemple, la fonction

$$y = \frac{1}{5} - \frac{x}{2} = 0{,}2 - 0{,}5.x,$$

il est facile de voir que, quand x est très grand et positif, y est très grand en valeur absolue et négatif. Par exemple :

pour $x = 1\,000\,000$, $y = -499\,999{,}8$,
pour $x = 1\,000\,000\,000$, $y = -499\,999\,999{,}8$,

et ainsi de suite.

Quand x est très grand en valeur absolue et négatif, y est très grand et positif.

Pour $x = -1\,000\,000$, $y = 500\,000{,}2$,
pour $x = -1\,000\,000\,000$, $y = 500\,000\,000{,}2$,

et ainsi de suite.

217. — Remarque. — Nous avons déjà dit (nº **107**) qu'on désigne par le symbole $+\infty$ une quantité excessi-

vement grande et positive et par $-\infty$ une quantité excessivement grande en valeur absolue et négative.

On peut alors résumer ce qui précède de la façon suivante :

Étant donnée la fonction

$$y = ax + b,$$

$$Si\ a > 0 \begin{cases} lorsque\ x = +\infty, & on\ a\quad y = +\infty, \\ lorsque\ x = -\infty, & on\ a\quad y = -\infty; \end{cases}$$

$$Si\ a < 0 \begin{cases} lorsque\ x = +\infty, & on\ a\quad y = -\infty; \\ lorsque\ x = -\infty, & on\ a\quad y = +\infty. \end{cases}$$

218. — **Variation de la fonction** $ax + b$. — Les deux théorèmes qui précèdent permettent maintenant de donner immédiatement la variation de la fonction linéaire

$$y = ax + b.$$

Il nous suffira de remarquer encore que la fonction y prend la valeur *zéro* pour la valeur de x pour laquelle on a

$$0 = ax + b,$$

c'est-à-dire pour

$$x = -\frac{b}{a}.$$

219. — **Premier cas** $a > 0$. — Faisons croître x depuis une valeur très grande en valeur absolue et négative jusqu'à une valeur très grande et positive. C'est ce que nous exprimerons en disant que *x croît de $-\infty$ à $+\infty$ (de moins l'infini à plus l'infini)*.

D'après les théorèmes I et II qui précèdent (nos **212** et **215**), la fraction *y croît également de $-\infty$ à $+\infty$.*

Elle est donc d'abord négative, s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$; puis devient positive.

220. — **Deuxième cas** $a < 0$. — Dans ce cas, d'après les théorèmes I et II (nos **212** et **215**), lorsque *x croît de $-\infty$ à $+\infty$*, la fonction *y décroît de $+\infty$ à $-\infty$.*

Elle est donc d'abord positive, s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$; puis devient négative.

221. — Tableaux des variations. — Pour résumer les résultats trouvés, il est bon de les insérer dans un tableau. Pour cela, on forme un tableau à deux colonnes. Dans la première colonne, on inscrit *de haut en bas, par ordre de grandeur croissante*, les valeurs de x. Dans la seconde colonne, on inscrit les valeurs correspondantes de la fonction y. Il suffit alors de lire le tableau de haut en bas pour savoir comment se comporte la fonction. Nous avons inscrit ci-joints les deux tableaux de la variation de y dans les deux cas où a est positif ou négatif.

$a > 0$		$a < 0$	
x	y	x	y
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
croît	croît négative	croît	décroît positive
$-\frac{b}{a}$	0	$-\frac{b}{a}$	0
croît	croît positive	croît	décroît négative
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Mais pour se rendre encore mieux compte de la variation d'une fonction, on emploie une méthode graphique qui, beaucoup mieux que les tableaux, fait voir le sens de la variation.

C'est cette méthode que nous allons expliquer pour terminer ce chapitre.

§ 5. — Représentation graphique de la variation de $ax + b$.

222. — Graphique de température. — Supposons qu'on ait observé la température en un certain lieu, pendant une journée de janvier et qu'on ait noté la tempéra-

ture toutes les heures de midi jusqu'à minuit. Admettons, par exemple, qu'on ait trouvé les températures suivantes :

Midi.....	$+ 5°,1$	7^h........	$+ 3°$
1^h........	$+ 5°,8$	8^h.	$+ 1°,5$
2^h........	$+ 6°,2$	9^h........	$- 0°,7$
3^h........	$+ 5°,9$	10^h.......	$- 2°,1$
4^h........	$+ 5°,5$	11^h.......	$- 3°,6$
5^h........	$+ 5°$	12^h.......	$- 4°,3$
6^h........	$+ 4°,2$		

On a ainsi un tableau des températures successives. On y voit que la température s'est d'abord élevée entre midi et 2 heures de $+ 5^0,1$ à $+ 6^0,2$ pour s'abaisser ensuite sans arrêt, jusqu'à minuit, à $- 4^0,3$. A ce tableau, on substitue un *graphique* qui parle mieux aux yeux et que l'on fait de la façon suivante :

On prend (fig. 16) du papier quadrillé. Sur ce papier on renforce à l'encre une raie horizontale ox et une raie verticale oy.

Sur la droite ox, on marque les *heures* aux points de division formés par le quadrillage : o correspond à midi; puis 1^h, 2^h, 3^h, etc.... Sur la droite oy on marque les températures : o correspond à la température 0^0. On marque ensuite les degrés positifs de bas en haut en remontant, aux points de division formés par le quadrillage sur oy, $+ 1^0$, $+ 2^0$, $+ 3^0$, etc. On marque, de même, les degrés négatifs de haut en bas à partir de o, en descendant, $- 1^0$, $- 2^0$, $- 3^0$, etc....

Ceci fait, *une température quelconque est représentée par le point qui se trouve à l'intersection de la verticale de l'heure avec l'horizontale de cette température.*

Par exemple, à 7 heures, la température est de $+ 3^0$. On marquera donc le point M qui est à l'intersection de la verticale de 7 heures avec l'horizontale de 3^0 (fig. 16).

En suivant la même méthode, on a :
à midi le point A sur oy à la division $+5^{0},1$,

à 1^{h}	—	B sur la verticale		1^{h} à la division		$+5^{0},8$,
à 2^{h}	—	C	—	2^{h}	—	$+6^{0},2$,
à 3^{h}	—	D	—	3^{h}	—	$+5^{0},9$;

et ainsi de suite.

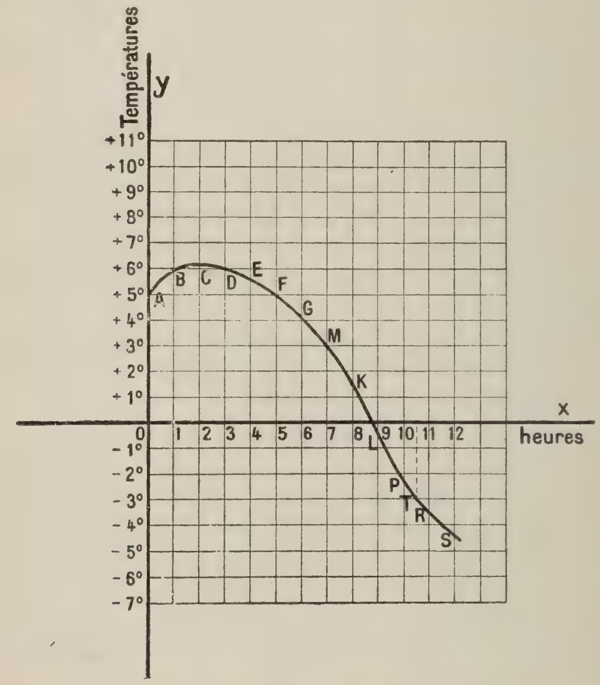


Fig. 16.

A partir de 9 heures les points sont *au-dessous* de ox car les températures sont négatives. On a :

à 9^{h}	le point L sur la verticale			9^{h} à la division		$-0^{0},7$,
à 10^{h}	—	P	—	10^{h}	—	$-2^{0},1$,
à 11^{h}	—	R	—	11^{h}	—	$-3^{0},6$,
à min.	—	S	—	12^{h}	—	$-4^{0},3$.

Les points A, B, C, D,... P, R, S étant marqués, on les joint par un trait continu ABCD.... RS, et c'est ce trait qu'on appelle le *graphique* de la température.

223. — **Avantages.** — Ce graphique remplace alors le tableau précédent. Si nous voulons savoir quelle était la température à 8 heures, il nous suffit de regarder à quelle division la courbe coupe la verticale 8 heures; et nous lisons que la température était de $+1^\circ,5$, car le point K d'intersection est entre les divisions $+1^\circ$ et $+2^\circ$, au milieu.

Ce graphique a l'avantage de mieux parler aux yeux. En effet, lorsque la température s'élève, les points représentatifs *montent*, la courbe *monte*; lorsque, au contraire, la température s'abaisse, les points représentatifs *descendent*, la courbe *descend*. Il suffit donc de jeter un coup d'œil sur le graphique pour voir que la courbe monte d'abord jusque vers 2 heures, puis descend jusqu'à minuit.

Mais il y a plus, ce graphique permet plus facilement de savoir approximativement quelle température il était à une *heure quelconque* ou, inversement, à quelle heure la température avait une valeur donnée.

Si, par exemple, nous voulons savoir quelle était la température à $10^h\ 1/2$, nous traçons (en pointillé sur la figure 16) la verticale qui passe par la division $10^h,5$ de ox; elle rencontre la courbe en un point T. La division correspondante à ce point T sur oy nous indique la température correspondante. Ainsi la division correspondante à T est environ -3°. La température était environ de -3° à $10^h\ 1/2$.

Inversement, cherchons à quelle heure de la journée la température a été de $+2^\circ$. Pour cela, nous prenons le point d'intersection de l'horizontale $+2^\circ$ avec la courbe Ce point est entre les divisions 7 heures et 8 heures, environ à $7^h\ 3/4$. C'est donc environ à $7^h\ 3/4$ que la température a été de $+2^\circ$.

224. — Coordonnées. — Au fond, ce que nous venons de faire dans ce qui précède n'est autre chose que la *représentation graphique d'une fonction*; car la température à chaque heure du jour est une *fonction* de l'heure.

Cette méthode se généralise et s'étend à une fonction quelconque.

Traçons, dans un plan (fig. 17), deux axes rectangulaires ox et oy, sur chacun desquels nous prenons un sens

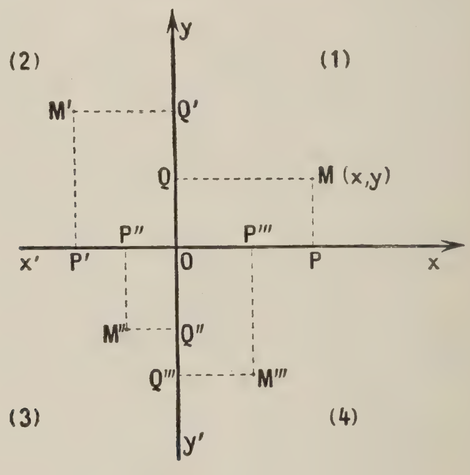


Fig. 17.

positif. Ce sens sera de o vers x sur ox et de o vers y sur oy.

Ceci posé, soit M un point quelconque du plan, abaissons de M la perpendiculaire MP sur ox et la perpendiculaire MQ sur oy.

Choisissons une unité de longueur, qui d'ailleurs peut être arbitraire.

Par définition, les mesures algébriques des deux segments $\overline{\text{OP}}$ *et* $\overline{\text{OQ}}$, *portés par les axes* ox *et* oy, *sont ce qu'on appelle les* ***coordonnées*** *du point* M.

Les axes ox et oy sont alors appelés ***axes de coordonnées***.

Le segment $\overline{OP}$ porté par ox est ce qu'on appelle l'***abscisse*** du point M. On le désigne généralement par la lettre x; de telle sorte que l'on a :

$$x = \overline{OP}.$$

Le segment $\overline{OQ}$ porté par oy est ce qu'on appelle l'***ordonnée*** du point M. On le désigne d'ordinaire par la lettre y; de telle sorte que l'on a :

$$y = \overline{OQ}.$$

On inscrit quelquefois à côté du point M (fig. 17) ses coordonnées entre parenthèses, on a alors soin d'écrire toujours l'abscisse la première.

225. — Signes des coordonnées. — Les deux axes $x'x$ et $y'y$ forment autour du point O, appelé ***origine des coordonnées***, quatre angles xoy, $x'oy$, $x'oy'$ et xoy' que nous numéroterons (**1**), (**2**), (**3**) et (**4**).

Si nous prenons (fig. 17) un point M dans l'angle (**1**), ses deux coordonnées sont *positives*, car les segments $\overline{OP}$ et $\overline{OQ}$ ont les sens ox et oy.

Considérons, en second lieu, un point M′ dans l'angle (**2**), son abscisse $\overline{OP'}$ est dirigée dans le sens ox' et est *négative*, son ordonnée $\overline{OQ'}$ est dirigée dans le sens oy et est *positive*.

Soit, en troisième lieu, M″ un point de l'angle (**3**), son abscisse $\overline{OP''}$ est *négative*, son ordonnée $\overline{OQ''}$ est également *négative*.

Enfin, soit M‴ un point de l'angle (**4**), son abscisse $\overline{OP'''}$ est *positive* et son ordonnée $\overline{OQ'''}$ est *négative*.

Ces résultats se résument dans le tableau suivant :

		x	y
Positions du point.	(1)	+	+
	(2)	—	+
	(3)	—	—
	(4)	+	—

On remarquera que les points des angles (1) et (3) ont des coordonnées de même signe et que les points des angles (2) et (4) ont des coordonnées de signes contraires.

226. — Comme les résultats des quatre cas précédents sont *distincts*, les réciproques sont vraies. On peut donc dire qu'inversement la connaissance des signes des coordonnées d'un point permet de dire immédiatement dans lequel des quatre angles (1), (2), (3) ou (4) se trouve ce point.

227. — **Détermination d'un point par ses coordonnées.** — Nous venons de voir que tout point d'un plan a deux coordonnées bien déterminées. Nous allons montrer que, réciproquement, étant donnés deux nombres quelconques positifs ou négatifs, il existe un point du plan et un seul qui admet ces deux nombres pour coordonnées.

Soient en effet ox et oy (fig. 17) deux axes rectangulaires et une unité de longueur.

Soient, d'autre part, x et y deux nombres quelconques.

Il existe (n° 78) un point P et un seul sur ox, tel que

$$\overline{\mathrm{OP}} = x.$$

Il existe de même un point Q et un seul sur oy, tel que

$$\overline{OQ} = y.$$

Par P menons une parallèle à oy; par Q menons une parallèle à ox. Ces deux droites se coupent en un point M et un seul qui est l'unique point du plan qui a pour abscisse x et pour ordonnée y.

On peut donc dire que :

Tout point du plan est parfaitement déterminé par ses deux coordonnées.

228. — On pourrait encore construire le point M de coordonnées x et y de la façon suivante :

Sur ox nous prenons le point P tel que

$$\overline{OP} = x;$$

puis, en P, nous élevons une perpendiculaire à ox et sur cette perpendiculaire nous prenons une longueur PM égale à la *valeur absolue* de y et portée *au-dessus* de ox si y est *positif*, *au-dessous* de ox si y est *négatif*.

Par exemple, dans la figure 18, page 168, nous avons figuré

le point	A	de coordonnées	$x = 2$,	$y = 3$;
»	B	»	$x = -3$,	$y = 1$;
»	C	»	$x = -2$,	$y = -4$;
»	D	»	$x = 5$,	$y = -2$.

On appelle points de coordonnées *rondes* les points dont les coordonnées sont des nombres *entiers*. On conçoit alors que l'usage du papier quadrillé, comme dans l'exemple du n° **222**, facilite le marquage immédiat des points de coordonnées rondes.

229. — Points sur les axes. — Tout point situé sur l'axe ox a une *ordonnée nulle*.

Réciproquement tout point pour lequel

$$y = 0$$

est situé sur ox.

Tout point situé sur l'axe oy a une *abscisse nulle.*

Réciproquement tout point pour lequel

$$x = 0$$

est situé sur oy.

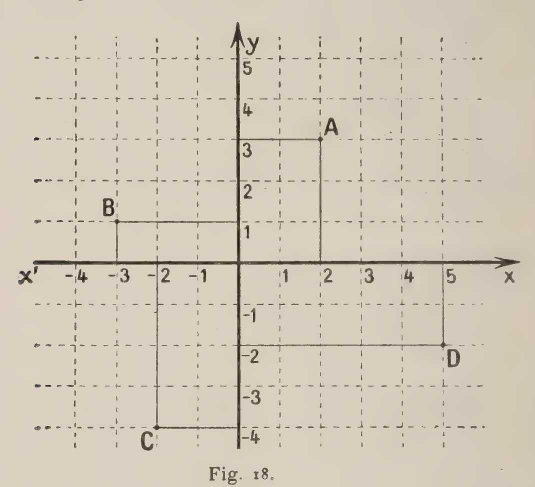


Fig. 18.

230. — Représentation graphique de la fonction linéaire. — Prenons d'abord un exemple et considérons la fonction

$$y = 2x - 1.$$

Donnons à x diverses valeurs et calculons les valeurs correspondantes de y. Nous aurons :

pour	$x = -2,$	$y = -5;$	A
—	$x = -1,$	$y = -3;$	B
—	$x = 0,$	$y = -1;$	C
—	$x = 1,$	$y = 1;$	D
—	$x = 2,$	$y = 3;$	E
—	$x = 3,$	$y = 5.$	F

Marquons les points A, B, C, D, E, F qui ont pour coorponnées les valeurs précédentes : A ayant pour coordon-

nées -2 et -5, B ayant pour coordonnées -1 et -3 et ainsi de suite.

Joignons (fig. 19) tous ces points par un trait continu, et nous aurons la *courbe représentative* de la fonction

$$y = 2x - 1.$$

En fait, nous n'avons pris qu'un certain nombre de points; mais nous aurions pu en prendre un beaucoup

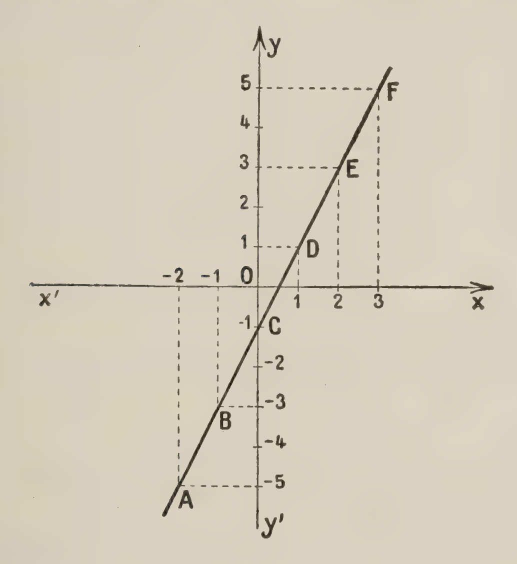


Fig. 19.

plus grand nombre et nous pourrions même imaginer qu'on recommence cette opération pour toutes les valeurs possibles et imaginables de x de $-\infty$ à $+\infty$.

Les points, en nombre infini, ainsi obtenus forment une *ligne* qu'on appelle la *courbe représentative* de la fonction.

Nous allons prouver que cette ligne est une *droite*.

231. — Définition. — D'une façon générale :

On appelle **graphique** *ou* **courbe représentative** *d'une fonction la courbe obtenue en construisant tous les points obtenus en donnant à* x *toutes les valeurs possibles de* $-\infty$ *à* $+\infty$ *et prenant pour l'ordonnée* y *les valeurs correspondantes de la fonction.*

C'est ce que nous avons fait dans les exemples qui précèdent.

Pour le graphique des températures, nous avons porté sur ox, en abscisses, les heures et nous avons construit les points ayant pour ordonnées les valeurs correspondantes de la température. La ligne qui passait par tous ces points était le *graphique* ou la *courbe représentative* de la température.

232. — Théorème. — *La courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite.*

Pour démontrer cette proposition importante nous distinguerons plusieurs cas, suivant les valeurs de a et b et leurs signes dans l'égalité

$$y = ax + b$$

qui définit la fonction.

233. — Premier cas particulier. — *Supposons d'abord* $a = 0$. — On a alors

$$y = b.$$

La valeur de y est *constante*, quel que soit x.

L'ordonnée y étant constante, tous les points de la ligne représentative sont à la *même distance* b de ox, cette ligne est donc une *parallèle* BB′ à ox (fig. 20) qui coupe oy en un point B tel que $\overline{OB} = b$.

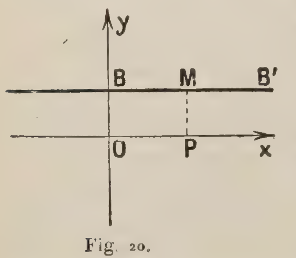


Fig. 20.

D'ailleurs, inversement, pour tout point M de cette droite l'ordonnée

$$\overline{PM} = \overline{OB} = b$$

est égale à b.

On remarquera que la fonction y étant *constante* ne croît

pas et ne décroît pas. La ligne représentative reste horizontale, elle ne monte pas ni ne descend pas.

234. — **Deuxième cas particulier**. — *Supposons, en second lieu,* $b = 0$. — On a alors,

$$y = ax. \qquad (1)$$

Faisons $x = 1$, il vient : $y = a$. Marquons (fig. 21 ou 22) le point A de coordonnées 1 et a.

Nous allons montrer que la ligne représentative de la fonction définie par l'égalité (1) *est la droite* OA.

Soit en effet M un point quelconque de coordonnées x et y tel que l'égalité (1) soit vérifiée. On aura, en vertu de cette égalité,

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{1}. \qquad (2)$$

Abaissons de A et M les perpendiculaires AB et MP sur ox. On a :

$$\overline{OB} = 1, \quad \overline{BA} = a;$$
$$\overline{OP} = x, \quad \overline{PM} = y.$$

L'égalité (2) s'écrit donc

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{OB}}. \qquad (3)$$

Fig. 21.

En premier lieu, l'égalité (2) prouve que si $a > 0$, x et y sont de même signe. Donc si A est dans l'angle (**1**) (fig. 21), M est soit dans l'angle (**1**), soit dans l'angle (**3**).

Si, au contraire, $a < 0$, x et y ont des signes contraires. Donc, si A est dans l'angle (**4**) (fig. 22), M est soit dans l'angle (**2**), soit dans l'angle (**4**).

Dans tous les cas, M *est situé dans les angles traversés par la droite* OA.

Pour prouver que M est bien situé sur OA, il suffit donc de prouver que l'angle $\widehat{POM}$ est égal à l'angle $\widehat{BOA}$ (fig. 21 et 22). Or, ceci est évident, car, d'après l'égalité (3), les deux triangles OBA et OPM ont un angle égal (droit), compris entre des côtés proportionnels : ils sont semblables, et on a bien

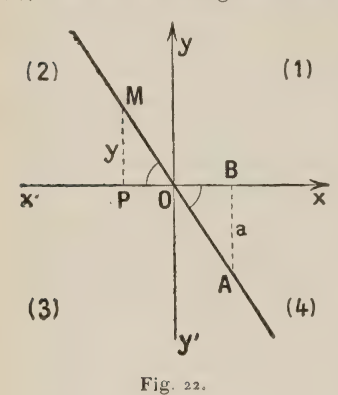


Fig. 22.

$$\widehat{POM} = \widehat{BOA}.$$

Le point M est donc *toujours* sur OA.

La droite OA, étant le lieu des points M tels que leurs coordonnées satisfassent l'égalité (1), est bien la courbe représentative de la fonction ainsi définie.

235. — **Cas général.** — *Considérons la fonction linéaire générale*

$$y = ax + b,$$

où b *est quelconque.*

Considérons alors la fonction y' suivante :

$$y' = ax.$$

Nous venons de voir que son graphique est une droite OA passant par l'origine des coordonnées O. Traçons cette droite (fig. 23).

Soit M un point quelconque de coordonnées x et y, y étant égal à $ax + b$. Figurons le point M′ de *même* abscisse x et d'ordonnée y' égale à ax. D'après ce qui précède, M′ *est sur* OA. Les points M et M′ ayant même abscisse sont sur une même parallèle PM à oy, et on a (n° **70**) :

$$\overline{M'M} = \overline{PM} - \overline{PM'} = y - y',$$

d'où on tire, en remplaçant y et y' par leurs valeurs :

$$\overline{M'M} = ax + b - ax = b.$$

Le segment $\overline{M'M}$ est donc *constant* et égal à b.

Lorsque x varie, M′ décrit la droite OA; il en résulte que M décrit la droite BC parallèle à OA déduite de OA par une translation égale à b et parallèle à oy. En d'autres termes, le lieu décrit par le point M est la parallèle BC à OA menée par le point B de oy tel que

$$\overline{OB} = b.$$

Cette droite BC est la ligne représentative de la fonction.

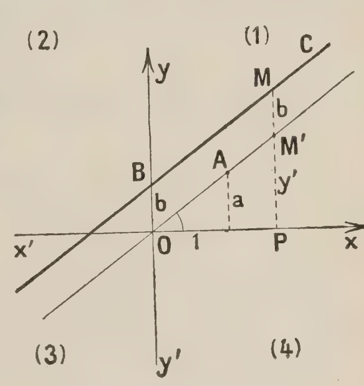


Fig. 23.

236. — Coefficient angulaire. — Il résulte de tout ce qui précède, que le graphique de la fonction linéaire

$$y = ax + b$$

est une droite.

Les deux nombres a et b jouent deux rôles très différents.

Le coefficient a fixe la *direction* de la droite; car, quand a est connu, la parallèle OA (fig. 23) à la droite BC est *connue*. On peut encore dire que a fixe l'angle que fait la droite avec ox; c'est pour cette raison que l'on nomme a le ***coefficient angulaire*** de la droite.

Cette dénomination se justifie d'ailleurs encore mieux par le théorème suivant.

237. — Théorème. — ***Le coefficient angulaire d'une droite est égal à la tangente trigonométrique de l'angle que fait cette droite avec la partie positive de l'axe ox.***

Soit BC la droite qui représente la variation de la fonction

$$y = ax + b,$$

et OA la parallèle à cette droite menée par O (fig. 24). Nous savons que OA représente la variation de la fonction

$$y = ax. \tag{1}$$

En d'autres termes, tout point dont les coordonnées x et y vérifient la relation (1) est situé sur la droite OA. On dit encore que la relation (1) est l'*équation de la droite* OA.

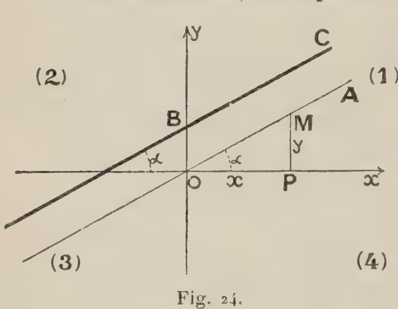


Fig. 24.

Soit alors α l'angle que fait la droite BC ou sa parallèle OA avec la *partie positive* de l'axe ox.

Si la droite OA est située (fig. 24) dans les angles (1) et (3) l'angle α sera aigu.

Si la droite OA est située (fig. 25) dans les angles (2) et (4) l'angle α sera obtus.

Nous distinguerons donc deux cas.

1° *L'angle α est aigu.* — Soit alors M (fig. 24) un point de la droite OA de coordonnées x et y, situé dans l'angle (1), et abaissons la perpendiculaire MP sur ox. Dans le triangle rectangle OPM on a :

$$\mathrm{MP} = \mathrm{OP} \cdot \operatorname{tang} \alpha$$

d'où

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}}.$$

Or, le point M étant dans l'angle (1) ses deux coordonnées sont positives et on a :

$$x = \text{OP}, \qquad y = \text{MP}.$$

Par suite,

(2) $$\text{tang}\ \alpha = \frac{y}{x}.$$

D'autre part, le point M étant sur OA, la relation (1) est vérifiée et on a :

$$\frac{y}{x} = a.$$

En remplaçant $\frac{y}{x}$ par sa valeur dans (2), on a donc

$$\text{tang}\ \alpha = a.$$

2° *L'angle α est obtus.* — Soit alors M un point de OA (fig. 25), situé dans l'angle (2), de coordonnées x et y. Abaissons de ce point la perpendiculaire MP sur ox. L'angle $\widehat{\text{MOP}}$ du triangle rectangle MOP est alors le *supplément* de l'angle α et on a, par suite, dans ce triangle :

Fig. 25.

$$\text{MP} = \text{OP} \cdot \text{tang}\ (\pi - \alpha) = -\text{OP}\ \text{tang}\ \alpha,$$

d'où

$$\text{tang}\ \alpha = -\frac{\text{MP}}{\text{OP}}.$$

Or, le point M étant dans l'angle (2), son abscisse est négative et son ordonnée positive. On a donc

$$x = -\text{OP}, \qquad y = \text{MP}.$$

Par suite

(3) $$\frac{y}{x} = -\frac{\text{MP}}{\text{OP}} = \text{tang}\ \alpha.$$

Le point M étant sur OA, la relation (1) est vérifiée et on a :

$$\frac{y}{x} = a.$$

On en conclut, en remplaçant $\frac{y}{x}$ par sa valeur dans la relation (3),

$$a = \text{tang } \alpha.$$

On a donc bien, *dans tous les cas*,

$$a = \text{tang } \alpha.$$

Toutes les circonstances générales, annoncées au n° 223, se vérifient alors ici.

Lorsque l'angle α est *aigu* (fig. 24) la droite BC *monte*. Le coefficient angulaire a est *positif* et d'ailleurs, comme nous l'avons vu (n° **219**), la fonction *croît*.

Lorsque l'angle α est *obtus* (fig. 25) la droite BC *descend*. Le coefficient angulaire a est *négatif* et d'ailleurs (n° **220** la fonction *décroît*.

Enfin, lorsque l'angle α est *nul* la droite BC est parallèle à ox (fig. 20), elle ne monte pas et ne descend pas : dans ce cas, le coefficient angulaire a est nul.

Ainsi, comme nous l'avions annoncé au n° **223**, la ligne représentative de la fonction indique bien le sens de sa variation. Cette ligne monte ou descend suivant que la fonction croît ou décroît.

238. — Profil d'une route. — Considérons une portion d'une route qui soit rectiligne. Imaginons qu'on mène par cette route un plan vertical. Ce plan coupera le terrain suivant une droite et si nous figurons cette droite sur une feuille de papier nous aurons ce qu'on appelle le *profil* de la route.

Soit OA (fig. 26) ce profil (nous indiquons le terrain coupé par des hachures). Menons par un point O de la droite OA une *horizontale* Ox et une *verticale* Oy. L'angle α

que fait OA avec Ox est l'*angle d'inclinaison* de la route. On appelle alors *pente* de la route la hauteur dont on s'élève verticalement lorsqu'on avance horizontalement de 1 mètre.

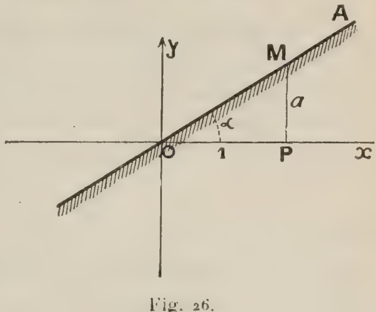


Fig. 26.

Prenons sur Ox une longueur OP égale à 1 mètre et élevons en P la perpendiculaire PM. Lorsqu'un piéton va sur la route de O en M, il avance horizontalement de 1 mètre et s'élève de MP. La *pente* est donc égale à MP.

On voit immédiatement que la *pente est égale au coefficient angulaire de la droite* OA. Car on a :

$$MP = OP \cdot \text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\alpha = a,$$

puisque $OP = 1$.

Lorsqu'on dit que la pente d'une route est de 5 °/₀, ceci veut dire que, sur cette route, on s'élève de 5 mètres tous les 100 mètres ou de $0^{m},05$ par mètre. Le coefficient angulaire de cette route est donc 0,05 et l'angle α qu'elle fait avec l'horizontale est donné par

$$\text{tang}\,\alpha = 0{,}05.$$

239. — Ordonnée à l'origine. — Nous venons de voir que le rôle de a, dans

$$y = ax + b,$$

est de caractériser l'inclinaison de la droite sur ox.

Tout autre est le rôle de b, qu'on appelle l'***ordonnée à l'origine.***

b indique simplement le point où la droite BC rencontre oy.

Si on donne à b diverses valeurs et qu'on conserve la

même valeur de a, on obtient diverses droites *parallèles*.

Deux droites* parallèles *ont même coefficient angulaire.

240. — Détermination pratique de la droite. — Puisque l'on sait que la ligne représentative de la variation d'une fonction linéaire est une droite, il suffit pour *construire* cette droite d'en construire deux points.

A cet effet, on donnera à x, dans l'égalité

$$y = ax + b,$$

deux valeurs particulières, par exemple $x = 0$ et $x = 1$, on calculera les valeurs de y correspondantes et on marquera les deux points obtenus. On peut aussi prendre pour l'un des deux points le point de rencontre de la ligne avec ox, qui a pour abscisse $x = -\frac{b}{a}$ obtenue en écrivant que y est égal à zéro.

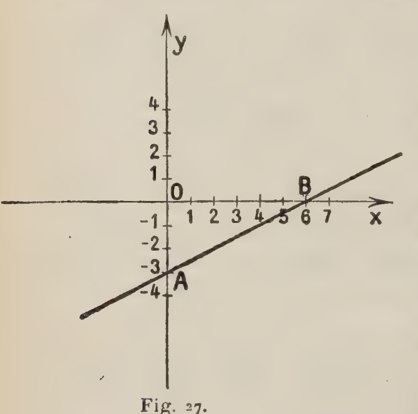


Fig. 27.

Exemple. — *Construire la droite qui représente la variation de*

$$y = \frac{x}{2} - 3.$$

Pour $x = 0$, on a $y = -3$; pour $x = 6$, on a $y = 0$.

Construisons (fig. 27) le point A sur oy de coordonnées $x = 0$, $y = -3$ et le point B sur ox de coordonnées $x = 6$, $y = 0$. La droite AB est la droite cherchée.

241. — Signification géométrique de la discussion de l'équation du premier degré. — Nous avons vu, au chapitre précédent, que, si l'on considère l'équation du premier degré

(1) $$ax + b = 0,$$

trois cas peuvent se présenter.

Si $a \neq 0$, l'équation a une solution.

Si $a = 0$, $b \neq 0$, l'équation n'a pas de solution.

Si $a = b = 0$, l'équation a une infinité de solutions.

Ces résultats donnent lieu à une interprétation géométrique intéressante.

Considérons en effet la fonction

(2) $$y = ax + b.$$

Résoudre l'équation (1), *c'est trouver la valeur particulière de* x *pour laquelle cette fonction prend la valeur zéro.*

Si alors nous représentons graphiquement cette fonction, nous obtenons une droite et le point de cette droite qui correspond à la valeur particulière de x, $x = -\frac{a}{b}$, pour laquelle y est nulle, est un point situé sur ox : c'est le point de rencontre de la droite avec ox.

Résoudre l'équation (1) *c'est donc trouver l'abscisse du point de rencontre de la droite* (2) *avec l'axe* ox.

Lorsque $a \neq 0$, la droite (2) *n'est pas parallèle à* ox, elle coupe alors ox en un point et un seul. Il y a donc une seule solution.

Lorsque $a = 0$, $b \neq 0$, la droite (2) (n° **233**) est parallèle à ox, elle ne rencontre pas ox : il n'y a pas de solution.

Enfin, lorsque $a = 0$, $b = 0$, la droite (2) a pour équation

$$y = 0,$$

elle *coïncide avec* ox. Tous les points de ox sont donc des points communs à cette droite et à ox. Il y a une infinité de points communs, donc une infinité de solutions.

242. — **Application, diagramme d'un mouvement uniforme.** — Nous avons vu que l'équation générale du mouvement uniforme est :

(1) $$x = x_0 + v(t - t_0).$$

Cette équation prouve que x est une *fonction linéaire* du temps t.

Ici la *variable indépendante* est t et la *fonction* est x.

Posons, pour abréger,

$$a = x_0 - vt_0$$

la formule (1) s'écrit :

$$x = vt + a.$$

Représentons graphiquement ce mouvement.

Traçons deux axes rectangulaires (fig. 28) Ot et Ox.

Ici t sera l'*abscisse* et x sera l'*ordonnée*. La ligne représentative sera, d'après ce qui précède, une droite AB, de coefficient angulaire égal à v et d'ordonnée à l'origine égale à a.

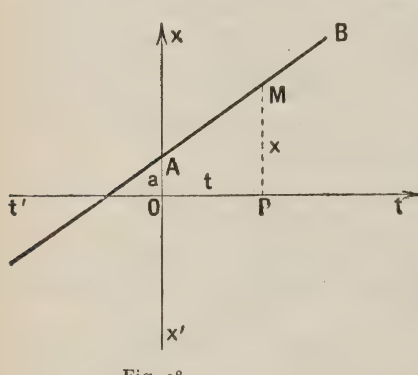


Fig. 28.

Cette ligne est ce qu'on appelle le *diagramme* du mouvement.

Ce diagramme présente plusieurs avantages :

1° Il permet de construire aisément la valeur de x à chaque instant.

En effet, pour savoir la valeur de x à un instant t, je porte sur l'axe Ot un segment $\overline{OP} = t$. Je mène par P la parallèle à Ox qui coupe AB en M.

Le segment $\overline{PM}$ est la valeur de x cherchée.

2° Ce diagramme rend compte de la *rapidité* du mouvement.

Si le mouvement est lent, la vitesse v est petite, le coeffi-

cient angulaire de la droite est petit et la droite est peu inclinée sur Ot.

Au contraire, si le mouvement est très rapide, la vitesse v est très grande, le coefficient angulaire est grand et l'angle que fait la droite avec Ot est grand.

Ainsi la plus ou moins grande *pente* du diagramme indique la plus ou moins grande rapidité.

La vitesse est égale à la pente du diagramme.

243. — Graphiques des chemins de fer. — Ces diagrammes de mouvement sont très employés dans les chemins de fer pour figurer les mouvements des trains.

Considérons, par exemple, la ligne de Paris à Bordeaux.

Prenons comme origine Paris et soit v la vitesse d'un train, x sa distance à Paris, à l'instant t, on aura :

$$x = v(t - t_0),$$

t_0 étant l'instant du départ de Paris.

Si nous portons les *temps en abscisses* et les *distances en ordonnées*, le diagramme du mouvement du train sera une droite de pente v, tant que sa vitesse restera égale à v.

Si, à un certain endroit, le train s'arrête, la distance x reste *constante* pendant un laps de temps et le diagramme (n° **233**) est alors une droite parallèle à Ot.

Si, ensuite, le train repart au temps t_1 du point à la distance x_1 avec la vitesse v', l'équation de son nouveau mouvement sera :

$$x = x_1 + v'(t - t_1)$$

et le diagramme sera une nouvelle droite de pente v'.

On voit que le diagramme complet d'un train sera composé de lignes droites successives, les arrêts étant représentés par des lignes horizontales.

Exemple. — L'indicateur des chemins de fer d'été 1903 nous donne les renseignements suivants :

x	STATIONS.		RAPIDE n° 7	RAPIDE n° 101	EXPRESS n° 33
			matin.		soir.
0	Paris...........	Dép..	9^h52	Midi 23	10^h46
123	Les Aubrais......	Arr..	11^h28	1^h50	Min. 26
		Dép.	11^h32	1^h54	Min. 36
182	Blois	Arr..	....	....	1^h23
		Dép.	....	....	1^h16
235	St-Pierre-des-Corps	Arr..	Midi 48	3^h6	2^h9
		Dép.	Midi 52	3^h11	2^h19
303	Châtellerault....	Arr..	....	....	3^h17
		Dép.	....	....	3^h20
336	Poitiers.........	Arr..	2^h4	4^h19	3^h49
		Dép.	2^h9	4^h23	3^h57
449	Angoulême......	Arr..	3^h27	5^h37	5^h45
		Dép.		5^h41	5^h53
547	Libourne........	Arr..	....	....	7^h36
		Dép.	....	....	7^h43
588	Bordeaux Saint-Jean	Arr.	5^h8	7^h12	8^h50

Figurons, par exemple, la marche de quelques trains sur la ligne Paris-Bordeaux (fig. 29, page 184). Comptons les heures de la journée de 0 à 24, de minuit à minuit. Midi sera l'instant 12 ; 1 h. de l'après-midi sera l'instant 13, etc....

Nous porterons les temps *en abscisses* sur un axe horizontal Ot, en ayant pris une longueur arbitraire Ot pour représenter l'*heure*.

Portons les distances en *ordonnées* sur l'axe vertical Ox, ces distances étant prises de Paris comme origine. Prenons sur Ox une longueur arbitraire pour représenter 100 kilomètres, et marquons les points 100, 200, 300, 400, etc.... Intercalons, aux distances convenables, les stations.

Les Aubrais sont à 123 kilomètres de Paris. Nous marquerons donc cette station sur Ox à la division 123 avec l'unité choisie et ainsi de suite.

Si nous considérons alors la marche du rapide n° 7, nous voyons qu'il va d'abord d'un trait de Paris aux Aubrais. Il part de Paris à

9^h52 et arrive aux Aubrais à 11^h28. Le diagramme de sa marche est alors (fig. 29) une ligne droite ab qui part du point a d'abscisse 9^h52 sur Ot pour arriver au point b d'abscisse 11^h28 sur l'horizontale d ordonnée $x = 123^{km}$.

Arrivé aux Aubrais le train s'arrête 4 minutes; pendant tout ce temps on a

$$x = 123,$$

x est constant et le diagramme est une petite droite bc parallèle à Ot. A 11^h32 le train repart et va jusqu'à Saint-Pierre-des-Corps où il arrive à 12^h48. Le diagramme de la marche est une nouvelle portion de ligne droite cd, qui va du point

$$t = 11^h32^m \quad , \quad x = 123^{km}$$

au point

$$t = 12^h48^m \quad , \quad x = 235^{km}.$$

A Saint-Pierre-des-Corps, nouvel arrêt de 4 minutes qui se traduit par une petite droite de parallèle à Ot; et ainsi de suite.

Le diagramme complet du train est la ligne brisée $abcdefgh$.

Nous avons figuré encore sur la figure les diagrammes des deux trains 101 et 33. Pour le train 33 il faut remarquer que son diagramme est en deux morceaux parce qu'il passe par *minuit*. Arrivé à 24 (minuit), il faut revenir à *zéro*, en O.

Sur la même feuille de papier, nous pourrions également figurer les diagrammes des trains revenant de Bordeaux à Paris.

Dans ce cas, le sens positif sur la ligne étant Paris-Bordeaux, la vitesse v du train est *négative*. Les diagrammes sont alors des lignes droites *descendantes*.

Nous avons figuré en *pointillé* le diagramme du train n° 34, dont voici l'horaire :

Bordeaux, 10^h34 (matin) ; Angoulême, arr. *midi* 9, dép. *midi* 14 ; Poitiers, arr. 1^h33, dép. 1^h38 ; Saint-Pierre-des-Corps, arr. 2^h49, dép. 2^h53 ; Les Aubrais, arr. 4^h10, dép. 4^h14 ; Paris, arr. 5^h42. C'est une ligne brisée descendante.

Ainsi, sur le *graphique*, les diagrammes des trains allant de Paris à Bordeaux, ayant des vitesses positives, sont des lignes brisées *montantes*, c'est ce qu'on appelle les trains *montants*.

Les diagrammes des trains revenant de Bordeaux à Paris, ayant des vitesses négatives, sont des lignes brisées *descendantes*, c'est ce qu'on appelle les trains *descendants*.

— L'intérêt de tels graphiques est très grand et leur emploi simplifie *considérablement* les services d'une ligne.

1° Sur une même feuille de papier on a, en abrégé, la marche de tous les trains sur une double voie.

2° On peut immédiatement savoir à quelle heure un train donné devra passer en un point quelconque de la voie *non marqué sur l'indicateur*.

LIGNE DE PARIS A BORDEAUX.

x

Bordeaux
Libourne
Angoulême
Ruffec
Poitiers
Châtellerault
St. Pierre-d-C.
Blois
Les Aubrais
Paris

600
500
400
300
200
100

Express
No. 33
Rapide No. 34
Rapide No. 7
Rapide
No. 101
No. 33

a b c d e f g h

t

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

1h 2h 3h 4h 5h 6h 7h 8h 9h 10h 11h Minuit

MATIN

SOIR

Fig. 29. — GRAPHIQUE DE CHEMIN DE FER.

3° La pente générale du diagramme montre la rapidité du train.

Ainsi, dans la figure 29, on voit de suite que les trains n° 101 et n° 7 sont plus rapides que le train n° 33, car les diagrammes *montent plus vite.*

4° On voit de suite les *points de croisement* des trains. En effet, si deux trains se trouvent à la *même* heure en un *même* point de la voie, t et x ont les mêmes valeurs et les deux diagrammes se croisent au point de coordonnées t, x.

Ainsi dans la figure 29, les diagrammes des deux trains 34 et 7 se croisent un peu au-dessus de l'horizontale de Châtellerault, un peu avant 1^h^30 du soir. Les deux trains se croisent donc un peu avant 1^h^30, un peu plus loin que Châtellerault. En déterminant avec plus de précision le point de rencontre, on pourrait ainsi savoir l'heure et le lieu *exacts* du croisement.

Sur une ligne à *double voie* deux trains allant en sens inverse peuvent se croiser n'importe où sans se rencontrer, puisqu'ils sont sur deux voies différentes.

Donc : *dans le diagramme une ligne montante et une ligne descendante peuvent se croiser n'importe où.*

Mais deux trains allant dans le même sens ne peuvent se rencontrer que *dans une gare*, car, si la rencontre a lieu en rase campagne, il y a collision ; au contraire, dans une gare, le chef de gare peut faire ranger l'un des deux trains sur une voie secondaire pour laisser passer l'autre.

Pour qu'il n'y ait pas collision, il faut donc que deux lignes montantes ou deux lignes descendantes ne se croisent que dans une gare.

5° Le graphique permet alors d'organiser en quelques minutes, sans calculs, l'horaire d'un nouveau train circulant sur la ligne.

Il suffit, pour cela, de tracer un diagramme qui ne rencontre les diagrammes déjà existants, et de même sens, que dans les gares. On sera sûr que le train dont la marche est réglée par ce diagramme pourra circuler sans accident sur la voie.

EXERCICES

PROBLÈMES A UNE INCONNUE

181. Quatre joueurs se sont associés : le premier a gagné 35 francs, le deuxième le $\frac{1}{9}$ du gain total, le troisième les $\frac{3}{8}$ de ce gain et le quatrième les $\frac{5}{12}$. Combien chaque joueur a-t-il gagné ?

182. En divisant deux nombres l'un par l'autre, on trouve pour quotient 4 et pour reste 60. Trouver ces nombres sachant que leur différence est 495.

183. Un tireur à la cible a 25 coups à tirer; il paie $0^{fr},40$ chaque fois qu'il n'atteint pas le but et reçoit 1 franc chaque fois qu'il met dans le noir. Il arrive qu'à la fin le tireur doit 10 francs. Combien de fois a-t-il atteint la cible?

184. Une personne a dépensé pour un premier achat $\frac{1}{5}$ de ce qu'elle avait plus 6 francs; pour un deuxième achat, les $\frac{4}{5}$ du reste moins 4 francs; pour un troisième achat, les $\frac{3}{7}$ du reste moins 5 francs; pour un quatrième achat les $\frac{4}{9}$ du reste plus 10 francs. Il lui reste alors $\frac{1}{8}$ de ce qu'elle avait. Combien avait-elle?

185. Un père étant interrogé sur l'âge de son fils, répond : si, du double de l'âge qu'il a maintenant vous retranchez le triple de celui qu'il avait il y a 6 ans, vous aurez son âge actuel.

186. Une personne augmente chaque année sa fortune du tiers de sa valeur, et à la fin de chaque année elle prélève 1 000 francs pour sa dépense. A la fin de la 3e année, elle a doublé sa fortune. Quelle était sa fortune primitive?

187. Après avoir payé les frais de succession à 9 %, on touche pour le montant d'un héritage 60 515 francs. Quelle était la valeur primitive de cet héritage?

188. Une personne a acheté 28 mètres d'étoffe. Elle a payé comptant et a eu 6 % d'escompte. Elle a alors payé en tout $312^{fr},25$. Quel était le prix du mètre?

189. Une personne a dépensé les $\frac{3}{5}$ de ce qu'elle avait moins 4 francs, puis le quart du reste plus 3 francs et enfin les $\frac{2}{5}$ du nouveau reste plus $1^{fr},20$. Il lui reste 24 francs. Quelle somme avait-elle?

190. On a acheté du vin à $0^{fr},95$ le litre et de la bière à $0^{fr},30$ le litre. Sachant que le nombre des litres de bière dépasse de 40 celui des litres de vin et qu'on a payé $20^{fr},50$ de plus pour le vin que pour la bière, trouver le nombre de litres de chaque boisson.

191. En multipliant un nombre par 4 et divisant le produit par 3, on obtient 24. Quel est ce nombre?

192. On a tiré d'un réservoir un certain nombre de litres d'eau et, pendant les trois jours suivants, on a tiré le quart de ce qu'on avait tiré la veille. Il reste alors dans le réservoir une quantité d'eau moitié moindre que celle qu'on a déjà tirée plus 170 litres. Combien de litres a-t-on tirés chaque jour, et quelle est la capacité du réservoir?

193. Un jardin carré ayant été entouré d'un mur de $0^m,40$ d'épaisseur, sa surface a été diminuée de 84 mètres carrés; quel était le côté et quelle était la surface du jardin?

194. Un père partage son bien de la manière suivante : il donne à l'aîné de ses fils 1 000 francs plus $\frac{1}{7}$ du reste ; au second 2 000 francs plus $\frac{1}{7}$ du reste ; au troisième 3 000 francs plus $\frac{1}{7}$ du reste et ainsi de suite. Trouver le bien du père, le nombre des enfants et la part de chacun, sachant que les parts ont été égales.

195. Des héritiers se partagent une succession de la manière suivante : le premier prend a francs et la $n^{\text{ième}}$ partie du reste ; le deuxième prend $2a$ francs et la $n^{\text{ième}}$ partie du reste ; le troisième $3a$ francs et la $n^{\text{ième}}$ partie du reste et ainsi de suite. Il arrive que l'héritage se trouve ainsi entièrement partagé et que les héritiers ont des parts égales. On demande le nombre des héritiers et la part de chacun.

196. Quel est le chemin parcouru par une voiture à 4 roues sachant que les roues de devant, qui ont $0^{m},80$ de diamètre, ont fait 55 tours de plus que les roues de derrière qui ont 1 mètre de diamètre ?

197. Deux mobiles A et A′ parcourent dans le même sens et d'un mouvement uniforme deux cercles concentriques ; les durées d'une révolution complète sont respectivement 5 minutes et 1 heure. En supposant que les 3 points O, A, A′ soient d'abord en ligne droite, au bout de combien de temps les rayons OA et OA′ coïncideront-ils de nouveau ?

198. Un marchand de vin a 50 litres de vin à $0^{fr},40$; 25 litres à $0^{fr},60$; 80 litres à $0^{fr},70$ et 15 litres à $0^{fr},75$. Combien devra-t-il ajouter de litres d'eau au mélange de ces différentes qualités de vin pour gagner 12 centimes par litre du mélange final ?

199. Partager 156 francs entre trois personnes de manière que la seconde ait 7 francs de plus que la première, et que la troisième ait 4 francs de plus que la seconde.

200. Quel est le nombre dont les $\frac{2}{3}$ diminués de 8 égalent le quart augmenté de 7 ?

201. La différence entre le prix des $\frac{5}{6}$ et celui des $\frac{3}{4}$ d'une pièce de toile est $12^{fr},60$. Quelle est la longueur de la pièce, si le mètre vaut $1^{fr},80$?

202. Partager le nombre 655 en deux parties dont l'une, augmentée de 5 égale les $\frac{3}{5}$ de l'autre.

203. Deux mines de houille A et B sont distantes de 218 kilomètres et elles sont reliées par un chemin de fer sur lequel le transport du charbon coûte 8 francs par tonne et par 100 kilomètres. On demande en quel point du parcours on devrait installer une usine si l'on voulait que le charbon y coutât le même prix qu'il vienne de A où il est vendu 28 francs la tonne ou de B où il est vendu 24 francs ?

PROBLÈMES A PLUSIEURS INCONNUES.

204. Trouver deux nombres dont la somme soit 98, et qui soient entre eux comme 10 est à 11?

205. Deux personnes doivent ensemble 180 francs; la première pourrait payer cette somme si elle ajoutait à ce qu'elle a les $\frac{2}{5}$ de ce que possède l'autre; et celle-ci pourrait payer cette somme si elle avait le $\frac{1}{4}$ de ce qu'a la première. Quel est l'avoir de chacune de ces personnes?

206. Un entrepreneur fait travailler un certain nombre d'ouvriers; s'il donne à chacun 3 francs par jour, il gagne 15 francs par jour; s'il donnait $3^{fr},60$ par jour, il perdrait 6 francs. On demande combien d'ouvriers il emploie et quel prix il retire de leur travail par jour.

207. Deux ouvriers travaillent ensemble, et l'un d'eux gagne $\frac{1}{3}$ de plus que le second. Le premier a travaillé 5 jours de plus que le premier, et il a reçu 100 francs, tandis que l'autre n'a reçu que 60 francs. Combien chacun gagne-t-il par jour?

208. Trouver deux nombres ayant 5 pour somme et pour quotient.

209. Trouver une fraction qui devient égale à $\frac{2}{3}$ quand on retranche 1 de chacun de ses termes, et à $\frac{3}{4}$ quand on ajoute 1 à ses deux termes.

210. Deux nombres sont dans le rapport de 5 à 3, mais, si on retranche 10 du premier et si on ajoute 10 au second, le rapport est inverse. Quels sont ces nombres?

211. Trouver deux nombres tels que leur somme augmentée de 22 soit égale à deux fois le plus grand, et que la différence des deux nombres diminuée de 1 soit égale au plus petit.

212. Un homme, rencontrant des pauvres, veut donner 25 centimes à chacun, mais en comptant sa monnaie il s'aperçoit qu'il lui manque pour cela $0^{fr},10$; alors il ne donne que 20 centimes à chaque pauvre et il lui reste $0^{fr},25$. On demande combien cette personne avait de monnaie, et à combien de pauvres elle a fait l'aumône?

213. Un père a 42 ans et ses deux fils respectivement 10 et 6 ans. Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le quadruple de la somme des âges de ses deux fils?

214. J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et, quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 126 ans. Quel âge ai-je?

215. Les âges de deux personnes sont actuellement comme 5 est à 11, et il y a 4 ans ils étaient dans le rapport de 2 à 5. Quels sont les âges de ces deux personnes?

216. Deux personnes A et B ont chacune un certain nombre d'objets; si B en donnait 5 à A, A en aurait 5 fois plus qu'il n'en resterait à B, et elles en auraient autant l'une que l'autre si A en donnait 7 à B. Combien chaque personne avait-elle d'objets?

217. Deux vases de même poids contiennent des quantités d'eau différentes. Le poids total du premier est les $\frac{4}{5}$ du poids total du second; si on verse le contenu du second dans le premier, celui-ci pèse alors 8 fois plus que le second vide. Sachant que le poids de l'eau contenue dans le second surpasse de 50 grammes le poids de l'eau contenue dans le premier, on demande le poids de chaque vase et le poids du liquide qu'il contenait primitivement.

218. Un ouvrier ayant travaillé 7 jours avec son fils, puis 5 jours tout seul, a reçu 74 francs; une autre fois, il a reçu 50 francs pour 8 jours de travail dont 5 avec son fils. On demande le gain journalier de cet ouvrier et de son fils.

219. Un enfant dépense son argent en achetant des oranges; s'il en avait acheté 5 de plus pour le même prix, chaque orange lui aurait coûté $0^{fr},05$ de moins et, s'il en avait acheté 3 de moins pour la même somme, le prix d'une orange aurait été de $0^{fr},05$ de plus. Combien l'enfant a-t-il dépensé?

220. Trouver la vitesse et la longueur d'un train qui a mis 7 secondes pour passer devant un observateur, et 25 secondes pour traverser une gare de 378 mètres de longueur.

221. Un propriétaire vend un pré, une vigne et un champ. La vigne contient 23 ares de moins que le pré; mais l'are de vigne est vendu 9 francs de plus que l'are de pré, et, de la sorte, la vigne est vendue 674 francs de moins que le pré. Le champ contient 138 décamètres carrés de plus que la vigne et l'are de ce champ coûte 29 francs de moins que l'are de vigne; le champ est ainsi vendu 2 159 francs de plus que la vigne. Trouver la contenance du pré, de la vigne et du champ et le prix de l'are de chacun. (*Écoles d'Agriculture.*)

222. Trois frères ont acheté une propriété pour 50 000 francs; il manque au premier, pour payer à lui seul cette acquisition, la moitié de l'argent qu'a le second; celui-ci paierait l'acquisition à lui seul, si on ajoutait à ce qu'il possède le tiers de ce qu'a le premier, enfin le troisième aurait besoin pour faire le paiement en entier de joindre à ce qu'il a le quart de ce que possède le premier. Combien chacun a-t-il d'argent?

223. Un homme qui s'est chargé de transporter des vases de porcelaine, de trois grandeurs différentes, a traité le marché en stipulant qu'il paierait autant par chaque vase qu'il casserait, qu'il recevrait pour ceux qu'il rendrait en bon état. On lui donne d'abord 2 petits vases, 4 moyens et 9 grands : il casse les moyens, rend les autres en bon état et reçoit une somme de 28 francs. On lui donne ensuite 7 petits vases, 3 moyens et 5 grands : il casse les 5 grands et, rendant les autres intacts, il reçoit 3 francs. Enfin pour le transport de 9 petits vases, 10 moyens et 11 grands, il ne reçoit que 4 francs, car il a brisé les 11 grands. On demande ce qu'on a payé pour le transport d'un vase de chaque grandeur.

224. Après une partie, trois joueurs comptent leur argent : un seul ayant perdu, les deux autres ont gagné chacun une somme égale à celle qu'ils ont mise au jeu. Après une seconde partie, l'un des gagnants de la partie précédente perd, et les deux autres gagnent chacun une somme

égale à celle qu'ils avaient en commençant la seconde partie. La troisième partie est perdue par le joueur qui avait gagné jusque-là dans les parties précédentes, et les autres gagnent une somme égale à celle qu'ils avaient en commençant cette partie. Chacun des trois joueurs se retire alors avec 120 francs; combien chacun avait-il au début du jeu?

225. Deux robinets A et B alimentent un même réservoir; on ouvre A pour remplir le réservoir au quart, puis on ouvre ensuite B et le réservoir achève de se remplir en $1^h\frac{1}{4}$ par les deux robinets. Si on avait laissé couler B pendant une demi-heure et ensuite ouvert le robinet A, le réservoir aurait achevé de se remplir en $1^h\frac{1}{7}$ par les deux robinets. Quel temps faudrait-il à chaque robinet coulant seul pour remplir le bassin?

226. Trouver les âges de deux personnes, sachant que, si la première avait 4 ans de moins, son âge serait les $\frac{6}{13}$ de celui de la seconde et que, si la première avait 4 ans de plus, son âge serait les $\frac{2}{3}$ de celui de la seconde.

227. Une personne possède deux sommes A et B en numéraire français. Si A est en pièces d'or et B en pièces d'argent, le total du poids des deux sommes est 975 grammes; mais si A était en pièces d'argent et B en pièces d'or, le total de leur poids serait 3 150 grammes. Quels sont en francs ces deux sommes?

228. Deux robinets A et B sont disposés au-dessus d'un bassin et, ouverts, laissent couler de l'eau. Si on laisse A ouvert pendant 1^h30^m et B pendant 54 minutes, on recueille dans le bassin $427^l,5$ d'eau; mais, si on avait ouvert A pendant 54 minutes et B pendant 1^h30^m, on aurait obtenu $386^l,1$ d'eau. On demande combien chaque robinet fournit à lui seul d'eau en une heure.

229. Trouver un nombre de trois chiffres qui augmente de 270 lorsqu'on intervertit l'ordre de ses deux premiers chiffres, qui diminue de 396 lorsqu'on intervertit l'ordre de ses chiffres extrêmes et qui diminue de 63 quand on intervertit l'ordre de ses deux derniers chiffres.

230. Déterminer un nombre de trois chiffres sachant : 1° que le chiffre des dizaines est égal à celui des unités; 2° qu'en ajoutant 42 au double du nombre on obtient le nombre renversé; 3° que, si on met le chiffre des dizaines à la place de celui des centaines et réciproquement, on obtient un nombre qui, augmenté de 27, égale le nombre renversé.

231. Le chiffre des centaines d'un nombre de trois chiffres vaut les $\frac{3}{5}$ du chiffre des unités, et le chiffre des dizaines vaut la moitié de la somme des deux autres. Trouver ce nombre, sachant qu'en lui ajoutant 198 on obtient le nombre renversé.

232. Deux nombres sont tels qu'en cherchant leur plus grand diviseur commun par la méthode des divisions successives la première division donne 3 pour quotient et 6 pour reste, et que le quotient obtenu dans la deuxième et dernière division est égal à la vingtième partie du plus grand nombre. Quels sont ces nombres?

233. Un orfèvre possède des petits lingots formés d'or et de cuivre ; les uns pèsent 10 grammes et sont au titre 0,840, les autres pèsent chacun 8 grammes et leur titre est 0,750. On forme deux groupes, l'un composé de lingots pesant 10 grammes, l'autre formé de lingots de 8 grammes. Ces deux groupes contiennent autant d'or l'un que l'autre. Combien y a-t-il de lingots dans chacun de ces groupes sachant qu'il y en a 48 en tout ?

234. Un marchand remplit une pièce de vin de 228 litres avec 3 sortes de vins qui lui coûtent $0^{fr},50$, $0^{fr},75$ et $0^{fr},80$ le litre et une certaine quantité d'eau. Il vend ce vin $0^{fr},70$ le litre et gagne $0^{fr},10$ par litre. Il a mis 5 fois moins de litres d'eau que de litres de vin et deux fois plus de vin à $0^{fr},50$ que de vin à $0^{fr},80$. On demande combien il a mis d'eau et de chaque espèce de vin pour faire le mélange.

235. On a du grain de deux qualités : quand on les mélange dans le rapport de 3 à 2, l'hectolitre vaut $33^{fr},80$ et mélangés, dans le rapport de 1 à 3, l'hectolitre vaut $32^{fr},75$. Trouver le prix de chaque espèce.

236. Un propriétaire achète à crédit, à raison de 54 000 francs l'hectare, deux terrains dont le second a la moitié de la contenance du premier moins 3 ares. Au bout de 15 mois, il paie, prix d'achat et intérêts à 4 $^0/_0$ compris, la somme de 139 482 francs. On demande les surfaces de ces deux terrains.

237. On a deux liquides dont les densités sont 1,3 et 0,7. Combien faut-il prendre de litres de chacun d'eux pour en former un mélange dont le volume soit 3 litres et la densité 0,9 ?

238. Trouver le poids et le titre d'un lingot sachant qu'en le fondant avec 3 kilogrammes d'argent fin on obtient un alliage au titre de 0,9 ; tandis qu'en le fondant avec un autre lingot de 2 kilogrammes au titre de 0,9 on aurait obtenu un alliage au titre de 0,84.

239. On a un alliage homogène d'or et de cuivre pesant $2^{kg},7$ au titre de 0,850. On demande de déterminer le poids du fragment de cet alliage qu'il faudrait débarrasser complètement du cuivre qu'il renferme pour qu'en fondant l'or provenant de cette opération avec ce qui reste de l'alliage on ait un nouveau lingot au titre de 0,900.

240. On a un rectangle dont les dimensions sont 30 mètres et 20 mètres. Trouver les dimensions d'un second rectangle semblable au premier et dont le périmètre soit 360 mètres.

241. Démontrer que si l'expression

$$ax^2 + bx + c$$

est telle qu'elle prenne pour $x = 1$ la valeur 0, pour $x = 2$ la valeur 1, pour $x = 3$ la valeur 4, elle prendra la valeur $(u - 1)^2$ pour $x = u$.

DISCUSSIONS

242. Étant donnés 4 nombres a, b, c, d, quel nombre x faut-il leur ajouter pour que les résultats obtenus soient en proportion ? Discussion.

243. Trouver un nombre x tel que si, on le retranche des nombres donnés a et b et qu'on divise les restes obtenus respectivement par b et par a, la somme des quotients soit 1. — Montrer que la valeur de l'inconnue est positive quels que soient a et b.

244. Trouver trois nombres x, y, z tels que le rapport des deux derniers soit égal à $\frac{m}{n}$ et que, si au premier on ajoute chacun des deux autres, les deux sommes obtenues soient respectivement a et b. Trouver les conditions pour que les inconnues soient positives.

245. On a deux tonneaux renfermant du vin. On verse du premier dans le second autant de litres qu'il y en a déjà dans celui-ci; on verse ensuite du second tonneau dans le premier autant de litres qu'il en reste dans le premier; puis, du premier dans le second, autant de litres qu'il y en avait déjà dans celui-ci. Il reste alors a litres dans chaque tonneau. Combien y avait-il de litres au début dans chaque tonneau?

246. Les poids spécifiques de deux métaux sont p et p'. Combien de grammes faut-il prendre de chaque métal pour former un alliage de a grammes, dont le poids spécifique soit p''? On admet que l'alliage se fait sans contraction ni dilatation.

Interpréter la valeur obtenue pour le cas où $p' = p$ et $p' > p''$.

247. Trouver la densité d'un alliage formé de n lingots dont les poids sont p_1, p_2 p_3..... p_n, et les densités d_1, d_2, d_3..... d_n en supposant qu'il n'y ait ni contraction, ni dilatation.

248. Un négociant a du café de trois qualités différentes lui coûtant respectivement a francs, b francs et c francs le kilogramme. Il voudrait en faire un mélange de n kilogrammes en employant autant de la troisième qualité que des deux premières ensemble, et qui ne revint qu'à d francs le kilogramme. Combien doit-il en prendre de chaque espèce? Que faut-il pour que le problème soit possible?

249. Trouver le côté d'un triangle équilatéral sachant que, s'il augmente de a, sa surface augmente de b^2.

250. On donne trois points O, A, B en ligne droite. Trouver sur cette droite un point M tel que sa distance au point A soit moyenne proportionnelle entre ses distances aux points O et B.

251. Deux mobiles se déplacent d'un mouvement uniforme sur une droite indéfinie et passent en même temps l'un en A, l'autre en B; le premier a une vitesse v et le second une vitesse $2v$. A quelle époque se rencontreront-ils? Discuter.

252. Étant données deux droites parallèles dont la distance $AB = a$, et un point I dans leur plan, mener une perpendiculaire commune CD aux deux droites, telles qu'en menant IC et ID rencontrant AB en P et Q le triangle IPQ ait une surface donnée m^2.

253. Étant donnés un cercle O et un rayon OA, trouver sur ce rayon un point M tel qu'en menant la tangente MB au cercle, et abaissant de B la perpendiculaire BC sur OA, on ait $AC = l$.

254. On donne deux droites parallèles AX et BY, une perpendiculaire commune AB et un point P entre A et B tel que $AP = a$ et $PB = b$.

On mène par P une droite CPD rencontrant AX en C et BY en D et faisant avec chacune des parallèles un angle de 45 degrés. On demande de mener par P une droite MPQ coupant AX en M et BY en Q telle que la somme des aires des triangles MPC et PDQ soit égale à une quantité donnée K^2. On prendra comme inconnues les longueurs $AM = x$ et $BQ = y$.

255. On donne une droite indéfinie xy et deux points A et B situés d'un même côté de cette droite. On demande de trouver sur xy un point M tel que le triangle AMB ait une aire donnée $\frac{1}{2}$ K². Discuter.

256. On donne le côté a et la hauteur h issue du sommet A d'un triangle ABC. Calculer les dimensions d'un rectangle inscrit dans le triangle, le périmètre de ce rectangle étant donné, $2p$; l'un des côtés du rectangle doit reposer sur BC et la surface du rectangle doit être tout entière comprise dans le triangle. Discuter.

257. Une couronne circulaire plane a une épaisseur donnée a. On donne de plus le rapport de la surface de cette couronne à celle du cercle qui a même centre que la couronne, et pour rayon la moyenne arithmétique des rayons des cercles qui comprennent la couronne. Déterminer ses deux rayons et indiquer les valeurs limites du rapport donné.

REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

258. Représenter graphiquement les fonctions y définies par les relations suivantes :

$$y = 2x; \qquad y = 2x + 1; \qquad y = 2x - 1;$$
$$y = -2x; \quad y = -2x + 1; \quad y = -2x - 1.$$

259. Représenter graphiquement les fonctions y définies par les relations :

$$x + y = 0; \quad 2x + 3y = 1; \quad 6x - 2y = 7; \quad -x + 4y = 1;$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1; \quad \frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} = 1.$$

260. Représenter graphiquement les fonctions y définies par les relations :

$$y = \frac{7 - 2x}{3}; \; 5x - 2y = 5,$$

et indiquer pour quelle valeur de x ces fonctions prennent la même valeur.

261. Une droite rencontre les axes de coordonnées en deux points A et B tels que $OA = 4$ et $OB = 3$. Donner l'expression y de la fonction de x que cette droite représente.

262. Représenter graphiquement les fonctions y définies par les relations :

$$y = 2x + 3; \qquad y = -\frac{x}{2} + 8; \qquad y = 1,$$

et montrer que le triangle formé par les droites représentant ces fonctions est rectangle : le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres.

263. Tracer les droites représentant les fonctions

$$y = kx \qquad \text{et} \qquad y = 3x + 6$$

et suivre sur la figure les différentes positions du point de rencontre de ces deux droites suivant les valeurs attribuées à k.

264. Après avoir tracé les droites

$$mx - y = 4, \qquad x - y = m,$$

discuter, sur la figure, la nature de l'intersection de ces droites suivant les valeurs attribuées à m.

265. La longueur L d'une barre métallique à t^0 est donnée, en fonction de sa longueur l à 0^0 par la formule

$$L = l(1 + at),$$

a étant le coefficient de dilatation linéaire.

Représenter graphiquement entre -20^0 et 50^0 :

1° L'allongement d'une barre de fer de 5 mètres de longueur à 0^0;

2° La longueur de cette barre de fer.

On sait que l'on a :

$$a = 0{,}000012.$$

266. On a soudé bout à bout deux barres, l'une de fer ayant 1 mètre de long, et l'autre de cuivre ayant 50 centimètres de longueur. On demande de représenter graphiquement entre -10^0 et 100^0 la variation de la longueur totale de cette double barre. Le coefficient de dilatation linéaire du fer est 0,000012 et celui du cuivre est 0,000018.

267. Quand on chauffe un liquide placé dans un vase, on n'observe que l'effet résultant de l'action de la chaleur sur le liquide et sur le vase : c'est la dilatation apparente du liquide. Le vase se dilatant, la dilatation apparente est la différence entre la dilatation absolue du liquide et celle de son enveloppe. Représenter, d'après cela, les dilatations absolue et apparente d'un volume égal à 250 centimètres cubes de mercure chauffé de 0^0 à 100^0 dans un vase de verre. Le volume V à t^0 d'un liquide ou d'un solide est donné en fonction du volume V_0 à 0^0 par la formule

$$V = V_0(1 + mt);$$

m étant l'augmentation de volume de l'unité de volume pour une élévation de température de 1^0. Pour le verre, $m = \frac{1}{38700}$,

pour le mercure, $m = \frac{1}{5550}$.

268. Deux mobiles partent en même temps de deux points A et B distants de 5 kilomètres et vont dans le sens AB, le premier avec une vitesse uniforme de 4 kilomètres à l'heure, le second avec la vitesse constante de 2 kilomètres à l'heure. Représenter graphiquement le mouvement de chacun d'eux, et représenter de même les variations de la distance qui les sépare à un instant quelconque.

269. Même problème que le précédent en supposant que les deux mobiles se déplacent en sens contraire.

270. Effectuer le graphique de tous les trains de la ligne Paris-Marseille et retour, d'après l'indicateur des chemins de fer.

CHAPITRE VI

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

§ 1. — Résolution d'une équation du second degré à une inconnue.

244. — **Définitions.** — Nous avons vu au chapitre IV que, lorsqu'une équation est entière, on peut faire passer tous les termes dans le premier membre.

De cette façon, après réduction des termes semblables, le premier membre est un polynôme entier par rapport à l'inconnue x; le second membre est *zéro*.

On appelle alors *degré* d'une équation le degré du polynôme, premier membre.

Il résulte de là que :

Une équation à une inconnue x *est du* **second degré** *si, lorsqu'on a fait passer tous les termes dans le premier membre, ce premier membre est, après réduction, un polynôme du second degré en* x.

Exemple. — Considérons l'équation :

$$x(x+1)-2x=(x-1)(2x+3).$$

Développons les deux membres ; il vient :

$$x^2+x-2x=2x^2-2x+3x-3.$$

Faisons tout passer dans le premier membre et réduisons, nous avons :

$$-x^2-2x+3=0$$

ce qui peut aussi s'écrire, en changeant les signes des deux membres,

$$x^2+2x-3=0.$$

Le premier membre est un polynôme du second degré en x, c'est donc une équation du *second degré*.

245. — Forme générale. — D'après ce que nous venons de dire, une équation du second degré est une équation qui se met sous la forme :

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

où a, b, c désignent des nombres *connus*.

Si a n'est pas égal à 1, divisons les deux membres par a, ce qui est permis (nº **141**), et l'équation s'écrit :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Désignons, pour abréger, $\frac{b}{a}$ par p et $\frac{c}{a}$ par q.

L'équation s'écrit alors :

$$(2) \qquad x^2 + px + q = 0.$$

Donc toute équation du second degré peut se mettre sous l'une des deux formes (1) ou (2).

246. — Racines carrées. — Proposons-nous d'abord de résoudre la question préliminaire que voici :

Étant donné un nombre algébrique, positif ou négatif, trouver tous les nombres positifs ou négatifs dont le carré est égal au nombre donné.

Il y a trois cas à distinguer :

1° *Le nombre donné est positif.* — Dans ce cas il a deux racines carrées algébriques *opposées*. Remarquons, en effet, que le carré d'un nombre positif ou négatif est *toujours positif* et égal au carré de sa valeur absolue. Cela résulte de la définition même de la multiplication :

$$(+3)^2 = 9 \quad , \quad (-3)^2 = 9.$$

Si donc il existe un nombre ayant pour carré un nombre donné *positif* a, la valeur absolue de ce nombre sera la racine carrée arithmétique exacte de a, soit $\sqrt{a}$. Il n'y a donc que deux nombres, et deux seulement, qui peuvent avoir pour carré a. Ce sont :

$$+\sqrt{a} \quad \text{et} \quad -\sqrt{a}.$$

D'ailleurs, ces deux nombres satisfont bien à la question :

$$(+\sqrt{a})^2 = a \quad , \quad (-\sqrt{a})^2 = a.$$

Ainsi, il y a deux nombres algébriques et deux seulement qui ont pour carré 9, ce sont $+3$ et -3.

2° *Le nombre donné est négatif.* — Dans ce cas il n'existe *aucun* nombre positif ou négatif dont le carré soit égal à ce nombre; car, comme nous l'avons remarqué plus haut, le carré d'un nombre quelconque est toujours *positif*. Il n'y a donc aucun nombre dont le carré puisse être égal à un nombre *négatif*.

3° *Le nombre donné est zéro.* — Le seul nombre dont le carré est égal à *zéro* est *zéro* lui-même.

247. — Examen d'un cas particulier. — Considérons d'abord l'équation :

$$x^2 - 4 = 0.$$

Elle s'écrit :

$$x^2 = 4.$$

et elle exprime que x est un nombre dont le carré est égal à 4. D'après ce que nous venons de voir, il y a deux nombres, et *deux seulement*, dont le carré est égal à 4. Ce sont :

$$+\sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad -\sqrt{4} = -2.$$

L'équation proposée a donc *deux* solutions et deux seulement :

$$+2 \quad \text{et} \quad -2.$$

Considérons encore l'équation :

$$x^2 + 3 = 0.$$

Elle s'écrit :

$$x^2 = -3$$

et elle exprime que x est un nombre dont le carré est égal

à -3. Or, comme nous venons de le voir, il n'existe *aucun* nombre dont le carré est égal à un nombre négatif -3.

L'équation *n'a donc pas de solution.*

248. — Considérons, plus généralement, une équation de la forme :

$$x^2+q=0,$$

où il n'y a pas de terme en x. Elle s'écrit :

$$x^2=-q,$$

et exprime que x est un nombre dont le carré est égal à $-q$.

Il y a donc trois cas :

1° Si q est *négatif*, $-q$ est positif et il y a *deux* solutions :

$$x=+\sqrt{-q} \quad , \quad x=-\sqrt{-q} \quad .$$

2° Si q est *positif*, $-q$ est négatif et il *n'y a pas de solution.*

3° Si $q=0$, l'équation s'écrit :

$$x^2=0$$

et il n'y a qu'*une* solution qui est :

$$x=0.$$

Les mêmes conclusions s'appliqueraient à l'équation :

$$ax^2+c=0$$

qui se ramène à la forme précédente en divisant par a.

249. — **Remarque préliminaire.** — Nous avons vu (n° **50**) que l'on a :

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2.$$

On voit donc que si on considère l'expression x^2+2ax, ce sont les *deux premiers* termes d'un carré, dont le premier terme x est la racine carrée du premier terme x^2 et

le second terme a est le quotient du second terme $2ax$ par le double $2x$ du premier terme de la racine.

Pour avoir le carré complet, il faut ajouter a^2, qui est le carré du second terme a.

Exemple. — L'expression : $x^2 + 6x$ peut s'écrire : $x^2 + 2 \cdot 3x$. Ce sont les deux premiers termes du carré de $x + 3$.

On a, en effet,

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

Pour avoir $(x + 3)^2$, il faut donc ajouter 9 à $x^2 + 6x$.

De même : $x^2 + 5x$ peut s'écrire $x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} x$ et ainsi on voit que ce sont les deux premiers termes du carré de $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2$. Pour avoir le carré complet, il faut ajouter à $x^2 + 5x$ la quantité $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$.

250. — Premier exemple. — Considérons l'équation :

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

que nous avons trouvée plus haut. Elle s'écrit :

$$x^2 + 2x = 3.$$

Le premier membre est formé des deux premiers termes du carré de $x + 1$ et pour avoir ce carré il faut ajouter à ce premier membre $1^2 = 1$. Ajoutons alors 1 aux deux membres de l'équation. Il vient :

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$$

ou

$$(x + 1)^2 = 4.$$

Sous cette forme, l'équation exprime que $x + 1$ est un nombre dont le carré est égal à 4. Or il y a deux nombres dont les carrés sont égaux à 4 : ce sont $+2$ et -2. On doit donc avoir

Soit : $x + 1 = -2$, d'où $x = -3$;
Soit : $x + 1 = +2$, d'où $x = 1$.

L'équation a donc *deux* solutions qui sont : 1 et -3.

251. — Second exemple. — Considérons encore l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Elle s'écrit :

$$x^2 + x = -1,$$

ou

$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x = -1.$$

Or, $x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x$ sont les deux premiers termes du carré de $x + \frac{1}{2}$ et il faut leur ajouter $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ pour avoir le carré complet.

Ajoutons donc $\frac{1}{4}$ aux deux membres de l'équation et il vient :

$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -1 + \frac{1}{4}$$

ou

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}.$$

Sous cette forme, on voit que $x + \frac{1}{2}$ devrait être un nombre dont le carré serait égal à $-\frac{3}{4}$, ce qui est impossible puisque $-\frac{3}{4}$ est négatif.

L'équation *n'a donc pas de solution.*

252. — Cas général. — Plus généralement, considérons l'équation

$$x^2 + px + q = 0.$$

Faisons passer le terme constant dans le second membre, elle s'écrit :

$$x^2 + px = -q,$$

ou

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x = -q.$$

Or, $x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x$ sont les deux premiers termes du carré de $x + \frac{p}{2}$ et, pour avoir le carré complet, il faut ajouter $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$. Ajoutons alors $\frac{p^2}{4}$ aux deux membres de façon à avoir $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ dans le premier. Il vient :

$$x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

ou

$$(3) \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Sous cette forme, l'équation exprime que si x est une solution, $x + \frac{p}{2}$ est un nombre dont le carré est égal à $\frac{p^2}{4} - q$.

Il y a donc trois cas possibles :

1° *Si* $\frac{p^2}{4} - q > 0$, il existe deux nombres opposés et deux seulement dont les carrés sont égaux à $\frac{p^2}{4} - q$; ce sont $+\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ et $-\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. On doit donc avoir :

Soit : $x + \frac{p}{2} = +\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, d'où $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$;

Soit : $x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, d'où $x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

L'équation a donc deux solutions et deux seulement qui sont :

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{et} \quad -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

2° *Si* $\frac{p^2}{4} - q < 0$, il n'existe aucun nombre dont le carré soit égal à $\frac{p^2}{4} - q$.

L'équation n'a donc pas de solution.

3° *Si* $\frac{p^2}{4} - q = 0$, il n'y a que le nombre o dont le carré soit égal à $\frac{p^2}{4} - q$. On doit donc avoir :

$$x + \frac{p}{2} = 0 \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{p}{2}.$$

L'équation n'a plus qu'une seule solution qui est égale à $-\frac{p}{2}$.

253. — **Résumé**. — Tout ce qui précède peut être résumé de la façon suivante :

Pour résoudre l'équation du second degré

$$(2) \qquad x^2 + px + q = 0,$$

on forme d'abord la quantité $\frac{p^2}{4} - q$ ***que l'on nomme le*** **discriminant**.

1° ***Si*** $\frac{p^2}{4} - q > 0$, ***l'équation a deux racines données par la formule***

$$(4) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ ;$$

où l'on prend l'un après l'autre les deux signes placés devant le radical.

2° ***Si*** $\frac{p^2}{4} - q < 0$, ***l'équation n'a pas de racines.***

3° ***Si*** $\frac{p^2}{4} - q = 0$, ***l'équation n'a qu'une racine qui est :***

$$x = -\frac{p}{2}.$$

254. — Remarque. — La formule de résolution :

$$(4) \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

fournit les deux racines lorsque le discriminant est positif à condition de prendre *successivement* devant le radical les deux signes (+) et (—).

Cette formule est encore applicable dans le cas où le discriminant $\frac{p^2}{4} - q$ *est nul.*

En effet, lorsque $\frac{p^2}{4} - q = 0$, elle devient :

$$x = -\frac{p}{2} \pm 0 = -\frac{p}{2},$$

mais, au lieu de donner *deux* valeurs distinctes pour x, elle n'en donne plus qu'*une seule.*

On peut donc dire que *lorsque le discriminant est nul, les deux racines fournies par la formule* (4) *deviennent égales.*

C'est à cause de cela que l'on dit fréquemment que, *dans le cas où le discriminant est nul, l'équation* (2) *a ses racines égales* ou encore *a une racine double.*

255. — Exemples. — Pour résoudre une équation du second degré on la ramènera à la forme (2) et on appliquera la règle du n° **253**.

Exemple I. — *Soit à résoudre l'équation :*

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Ici on a : $p = -5 \quad , \quad q = 6,$

$$\frac{p^2}{4} - q = \frac{25}{4} - 6 = \frac{1}{4}.$$

Le discriminant est positif. L'équation a donc *deux* solutions :

$$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

ou :

$$x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

EXEMPLE II. — *Soit à résoudre l'équation :*

$$(x+1)(x+2)+2x=4x-5.$$

Développons ; elle s'écrit :

$$x^2+x+2x+2+2x=4x-5.$$

Faisons tout passer dans le premier membre et il vient :

$$x^2-x+7=0.$$

Ici on a : $p=-1, \quad q=7;$

donc $$\frac{p^2}{4}-q=\frac{1}{4}-7=-\frac{27}{4}.$$

Le discriminant est négatif, *l'équation n'a pas de racines.*

EXEMPLE III. — *Considérons l'équation :*

$$4x^2+12x+9=0.$$

Divisons par 4. Elle s'écrit :

$$x^2+3x+\frac{9}{4}=0.$$

On a : $p=3 \quad , \quad q=\frac{9}{4},$

$$\frac{p^2}{4}-q=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}=0.$$

L'équation n'a donc qu'*une* racine (double) ou, si l'on veut, *deux racines égales :*

$$x=-\frac{3}{2}.$$

256. — Cas de l'équation $ax^2+bx+c=0$. — Lorsque le coefficient de x^2 n'est pas égal à 1, on ramène l'équation à la forme (2) en divisant les deux membres par a.

Appliquons ceci à l'équation générale :

(1) $$ax^2+bx+c=0.$$

En divisant par a elle devient :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0;$$

qui a la forme

(2) $$x^2+px+q=0$$

où on a : $p=\frac{b}{a}, \quad q=\frac{c}{a}.$

La formule de résolution (4) donne alors

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}.$$

Réduisons au même dénominateur les fractions placées sous le radical :

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

La formule de résolution devient alors :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

ou, puisque $\sqrt{4a^2} = 2a,$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

et, enfin,

(5) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Telle est la formule dans ce cas. On appelle toujours *discriminant* la quantité placée sous le radical et on arrive alors aux conclusions suivantes :

Pour résoudre l'équation générale

(1) $$ax^2 + bx + c = 0,$$

on forme d'abord le discriminant $b^2 - 4ac$:

1° ***Si*** $b^2 - 4ac > 0$, ***l'équation a deux racines données par la formule :***

(5) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

2° ***Si*** $b^2 - 4ac < 0$, ***l'équation n'a pas de racines ;***

3° ***Si*** $b^2 - 4ac = 0$, ***l'équation n'a qu'une racine, dite double (ou deux racines égales) donnée par la formule*** (5) ***qui se réduit à***

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

257. — Exemples. — Pour résoudre une équation du second degré, on appliquera donc la formule (5).

Exemple I. — *Soit à résoudre l'équation :*

$$2x^2 - 5x + 3 = 0.$$

On a ici :

$$a = 2 \quad , \quad b = -5 \quad , \quad c = 3.$$

La formule (5) donne alors :

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4}$$

ou

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} ,$$

on a donc deux racines :

$$x = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} ,$$

et

$$x = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

Exemple II. — *Soit à résoudre l'équation :*

$$3x^2 - 7x + 1 = 0.$$

La formule (5) donne de suite :

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 12}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}.$$

Extrayons la racine carrée *approchée* de 37. On trouve, en calculant cette racine comme on l'a appris en arithmétique : 6,08.
Les valeurs *approchées* des racines sont donc :

$$x = \frac{7 + 6{,}08}{6} = \frac{13{,}08}{6} = 2{,}18.$$

$$x = \frac{7 - 6{,}08}{6} = \frac{0{,}92}{6} = 0{,}15.$$

Exemple III. — *Soit encore à résoudre l'équation :*

$$(x+1)(x+2)(x+3) = x(x-1)(x-2).$$

Développons les deux membres, il vient :

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

L'équation *paraît* être du troisième degré ; mais quand on fait

tout passer dans le premier membre et qu'on réduit, les termes en x^3 disparaissent et on trouve :

$$9x^2 + 9x + 6 = 0$$

ou, en divisant par 3 les deux membres :

$$3x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Le discriminant est ici :

$$b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -15,$$

comme il est *négatif*, l'équation *n'a pas de racines*.

258. — Cas où le coefficient de x est pair. — Lorsque les coefficients a, b, c de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sont entiers et que le coefficient b est *pair*, la formule générale (5) se simplifie un peu.

Puisque b est pair, il est divisible par 2; on peut donc poser

$$b = 2b',$$

b' étant un nombre *entier*.

La formule (5) s'écrit alors

$$x = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dans la quantité sous le radical on peut mettre 4 en facteur :

$$4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$$

et on a :

$$\sqrt{4b'^2 - 4ac} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{b'^2 - ac} = 2\sqrt{b'^2 - ac}.$$

La formule devient ainsi :

$$x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}.$$

On peut diviser les deux termes par 2 et elle s'écrit enfin :

$$(6) \qquad x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

EXEMPLE. — *Soit à résoudre l'équation :*

$$5x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Le coefficient de x étant pair, nous appliquerons la formule simplifiée (6).

On a :

$$a = 5 \quad , \quad b' = -3 \quad , \quad c = 1$$

et, par suite,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-5}}{5} = \frac{3 \pm \sqrt{4}}{5}.$$

Les deux racines sont donc :

$$x = \frac{3+2}{5} = 1,$$

$$x = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}.$$

§ 2. — Relations entre les coefficients et les racines.

259. — Somme et produit des racines. — Considérons l'équation de second degré

$$x^2 + px + q = 0.$$

Nous avons vu que, lorsque le discriminant $\frac{p^2}{4} - q$ est positif, cette équation a deux racines données par la formule

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Désignons la première par x' et la seconde par x'', on a :

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Faisons-en la somme : il vient

$$x' + x'' = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p.$$

Formons de même leur produit, nous obtenons :

$$x' x'' = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right).$$

Dans le second membre nous avons le produit de la somme des deux quantités $-\frac{p}{2}$ et $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ par leur différence; ce produit est égal, comme nous savons (n° **52**), à la différence des carrés des deux nombres. On a donc :

$$x' x'' = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q.$$

En simplifiant, il vient :

$$x' x'' = q.$$

En résumé, on a les deux égalités

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} x' + x'' = -p, \\ x' x'' = q, \end{array} \right.$$

qui se traduisent en langage ordinaire de la façon suivante :

Lorsque l'équation

$$(2) \qquad x^2 + px + q = 0$$

a deux racines,

la somme de ces racines est égale au coefficient de x changé de signe; leur produit est égal au terme constant.

Vérifions ce fait pour l'équation résolue plus haut :

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Cette équation a pour racines 2 et 3. On a bien :

$$2 + 3 = 5 \qquad \text{et} \qquad 2 \cdot 3 = 6.$$

260. — Cas où le coefficient de x^2 n'est pas égal à 1. — Considérons l'équation générale :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Nous la ramenons à la forme (2) en divisant par a. Elle s'écrit alors

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

on a donc $$p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Les relations (7) entre les coefficients et les racines prennent alors la forme :

$$(8) \begin{cases} x' + x'' = -\dfrac{b}{a}, \\ x'x'' = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

qui se traduisent de la façon suivante :

Lorsque l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a deux racines,

la somme de ces racines est égale au coefficient de x ***changé de signe divisé par le coefficient de*** x^2.

Le produit des racines est égal au terme constant divisé par le coefficient de x^2.

Vérifions ceci pour l'équation

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

résolue plus haut. Cette équation a pour racines $\frac{3}{2}$ et 1, et on a bien :

$$\frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \quad , \quad \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

261. — Cas des racines égales. — Lorsque le discriminant de l'équation est nul, les deux racines x' et x'' sont égales. Les relations (7) et (8) sont encore exactes.

Prenons alors la somme des racines. Puisque $x''=x'$, on a :

$$x'+x''=2x'=-\frac{b}{a}$$

d'où

$$x'=-\frac{b}{2a}.$$

Ceci conduit à une conclusion importante.

***Lorsque le discriminant d'une équation du second degré est nul, ses deux racines sont égales et égales à leur* demi-somme.**

Ainsi nous avons vu que le discriminant de l'équation

$$4x^2+12x+9=0$$

est nul. Cette équation a donc deux racines égales et égales à leur *demi-somme.*

La *somme* des racines est : $-\frac{12}{4}=-3$.

Les deux racines sont donc égales à $-\frac{3}{2}$, c'est ce que nous avions trouvé.

262. — Application. — *Former une équation du second degré admettant pour racines deux nombres donnés.*

Supposons le problème résolu et soit

$$x^2+px+q=0$$

l'équation cherchée. Si elle admet pour racines deux nombres donnés, p sera égal à la somme de ces deux nombres *changée de signe* et q sera égal à leur produit. On connaît donc p et q. Si x' et x'' sont les nombres donnés on aura ainsi

$$p=-(x'+x''), \qquad q=x'x''.$$

L'équation cherchée est alors :

$$x^2-(x'+x'')x+x'x''=0.$$

Elle admet bien x' et x'' comme racines, car on peut l'écrire

$$(x-x')(x-x'')=0;$$

il n'y a qu'à développer le produit $(x-x')(x-x'')$ pour le vérifier. Sous cette forme on voit que le premier membre ne peut être nul que si l'un des deux facteurs est nul, c'est-à-dire si on a

soit $x-x'=0$ d'où $x=x'$;

soit $x-x''=0$ d'où $x=x''$.

Exemple. — *Former l'équation de second degré qui admet pour racines* 3 *et* — 8.

La somme est : $3-8=-5$,

le produit est $3\cdot(-8)=-24$,

L'équation cherchée est donc :

$$x^2+5x-24=0.$$

263. — Problème. — *Calculer deux nombres, connaissant leur somme et leur produit.*

Ces deux nombres, s'ils existent, seront racines d'une équation du second degré

$$x^2+px+q=0$$

facile à former.

Car, d'après ce qui précède, p est égal à la somme changée de signe et q est égal au produit.

Exemple. — *Trouver deux nombres dont la somme est* $-\frac{1}{21}$ *et le produit* $-\frac{2}{21}$.

Ces deux nombres sont racines de l'équation

$$x^2+\frac{1}{21}x-\frac{2}{21}=0$$

ou, en chassant le dénominateur,

$$21x^2+x-2=0.$$

La formule (6) donne :

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+168}}{42}=\frac{-1\pm 13}{42}.$$

Les deux nombres cherchés sont donc :

$$x' = \frac{-1+13}{42} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7},$$

$$x'' = \frac{-1-13}{42} = \frac{-14}{42} = -\frac{1}{3}.$$

264. — Somme des carrés des racines. — Soient x' et x'' les deux racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

On a, comme nous savons,

$$(x'+x'')^2 = x'^2 + x''^2 + 2x'x'',$$

d'où on tire :

$$x'^2 + x''^2 = (x'+x'')^2 - 2x'x''.$$

Si, dans le second membre de cette identité, nous remplaçons $x'+x''$ et $x'x''$ par leurs valeurs $-\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$, nous obtenons

$$x'^2 + x''^2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$x'^2 + x''^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}.$$

Cette formule permet de calculer la somme $x'^2 + x''^2$ des carrés des racines *sans avoir calculé ces racines.*

Ainsi, la somme des carrés des racines de l'équation

$$x^2 - 8x + 13 = 0$$

est $$x'^2 + x''^2 = 64 - 26 = 38.$$

Problème. — *Calculer le nombre λ de façon que la somme des carrés des racines de l'équation*

$$x^2 - 6x + \lambda = 0$$

soit égale à 26.

D'après ce qui précède la somme des carrés est égale à

$$\frac{b^2 - 2ac}{a^2} = 36 - 2\lambda.$$

Écrivons qu'elle est égale à 26 et nous avons

$$36 - 2\lambda = 26$$

d'où

$$\lambda = 5.$$

L'équation cherchée est donc :

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Les racines sont 1 et 5 dont la somme des carrés est bien 26.

265. — Signes des racines. — Les relations entre les coefficients et les racines permettent de reconnaître d'avance les signes et les grandeurs relatives des deux racines d'une équation du second degré, *sans les avoir calculées*.

Considérons, en effet, l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

et supposons $b^2 - 4ac > 0$. Soient x' et x'' les racines. On a, comme nous l'avons vu,

$$x' x'' = \frac{c}{a}.$$

Le seul examen de $\frac{c}{a}$ permet déjà de reconnaître si les deux racines sont de même signe ou non.

1° Si $\frac{c}{a}$ est *positif*, le produit des racines étant positif, elles sont de *même signe*.

2° Si $\frac{c}{a}$ est *négatif*, le produit des racines est négatif et elles sont de *signes contraires*.

Lorsque les deux racines sont de même signe, il reste à savoir *quel est leur signe commun*; à cet effet examinons la somme. On a :

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}.$$

Les deux racines étant de même signe $\left(\frac{c}{a} > 0\right)$:

Si $-\frac{b}{a}$ est *positif* la somme est positive et elles sont *toutes deux positives*;

Si $-\frac{b}{a}$ est *négatif* la somme est négative et les deux racines sont *toutes deux négatives.*

Lorsque les deux racines sont de signes contraires $\left(\frac{c}{a} < 0\right)$ l'examen du signe de la somme permet de reconnaître *quelle est celle qui est la plus grande en valeur absolue.*

En effet, lorsqu'on fait la somme de deux nombres de signes contraires (n° **24**), cette somme a le signe de celui des deux nombres qui a la plus grande valeur absolue.

Donc, les deux racines x' et x'' étant de signes contraires $\left(\frac{c}{a} < 0\right)$,

Si $-\frac{b}{a}$ est *positif*, c'est la racine positive qui est la plus grande en valeur absolue;

Si $-\frac{b}{a}$ est *négatif*, c'est la racine négative qui a la plus grande valeur absolue.

3° Lorsque $\frac{c}{a} = 0$ ou $c = 0$, l'équation du second degré devient $ax^2 + bx = 0$.

Elle s'écrit :

$$x(ax + b) = 0.$$

Pour que le premier membre soit nul il faut que l'un des deux facteurs soit nul. Ce qui donne :

soit $x = 0$;

soit $ax + b = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$.

Il y a une racine nulle; l'autre est égale à $-\frac{b}{a}$.

Lorsque b et c sont nuls tous les deux à la fois, l'équa-

tion se réduit à $x^2 = 0$; elle a alors une racine double égale à *zéro*.

En résumé, pour reconnaître les signes des racines sans résoudre l'équation :

1° *On examine le signe du produit* $\frac{c}{a}$;

2° *On examine ensuite le signe de la somme* $-\frac{b}{a}$.

266. — Remarque importante. — *Lorsque* $\frac{c}{a}$ *est négatif on peut toujours affirmer qu'il existe deux racines de signes contraires.*

Dans ce cas, en effet, a et c sont de signes contraires, le produit ac est donc négatif; $-4ac$ est alors *positif* et le discriminant b^2-4ac est la somme de deux nombres b^2 et $-4ac$, tous deux positifs, il est certainement *positif*. Les deux racines *existent* donc certainement. D'ailleurs, puisque leur produit est négatif, elles sont de signes contraires.

De là il résulte qu'*avant de former le discriminant il faudra toujours regarder d'abord si a et c ne sont pas de signes contraires.*

267. — Résumé. — Les résultats précédents peuvent se résumer dans le tableau suivant :

On commence *avant tout* par regarder le signe de $\frac{c}{a}$, il n'y á que lorsque $\frac{c}{a}$ est positif qu'il sera nécessaire de former b^2-4ac pour savoir s'il existe des racines.

On peut aussi remarquer que, lorsque $\frac{c}{a} > 0$ et que les deux racines existent ($b^2-4ac > 0$), la somme $-\frac{b}{a}$ ne peut pas être nulle, car sans cela les deux racines seraient *opposées*, ce qui n'est pas possible puisque leur produit est positif.

Tableau de discussion de l'existence et du signe des racines, sans que l'équation soit résolue.

$\frac{c}{a} < 0$ Il y a certainement deux racines de *signes contraires*.	$-\frac{b}{a} > 0$	la plus grande en valeur absolue est *positive*.
	$-\frac{b}{a} < 0$	la plus grande en valeur absolue est *négative*.
	$-\frac{b}{a} = 0$	les deux racines sont *opposées*.

$\frac{c}{a} > 0$ Il faut former le discriminant.	$b^2 - 4ac > 0$ il y a deux racines.	$-\frac{b}{a} > 0$	les deux racines sont *positives*.
		$-\frac{b}{a} < 0$	les deux racines sont *négatives*.
	$b^2 - 4ac = 0$. Il y a deux racines égales et égales à la demi-somme $-\frac{b}{2a}$.		
	$b^2 - 4ac < 0$. Il n'y a pas de racines.		

$\frac{c}{a} = 0$. Il y a une racine égale à *zéro*. L'autre racine est égale à $-\frac{b}{a}$.

Exemple. — *Soit l'équation :*

$$4548x^2 - x - 36715 = 0.$$

On voit de suite que c et a sont de signes contraires.

Donc l'équation a *deux racines* de signes *contraires*. La somme $\frac{1}{4548}$ est positive. *C'est donc la racine positive qui est la plus grande en valeur absolue.*

Nous voyons donc que, sans avoir résolu l'équation, *sans avoir fait aucun calcul*, nous savons que cette équation a deux racines dont l'une est positive et l'autre négative et que c'est la racine positive qui a la plus grande valeur absolue.

Il est aisé de se rendre compte qu'il aurait fallu ici faire un calcul très long pour voir les résultats *en résolvant*.

Les racines sont, en effet, *approximativement*,

$$x' = \frac{25986}{9096} \text{ et } x'' = -\frac{25984}{9096}.$$

Elles sont *en valeur absolue* très voisines.

§ 3. — Trinôme du second degré.

268. — Définition. — Tout polynôme réduit du second degré en x a, au plus, trois termes, à savoir : un terme en x^2, un terme en x et un terme constant. C'est donc un *trinôme* (n° **117**).

Il est de la forme :

$$ax^2 + bx + c,$$

et c'est ce qu'on appelle un ***trinôme du second degré***.

Ce trinôme est une *fonction* de la *variable* x, que nous étudierons comme nous avons étudié, au Chapitre V, la fonction linéaire.

A cet effet, nous allons d'abord montrer qu'on peut le mettre sous diverses formes qui nous seront utiles dans la suite.

269. — Décomposition du trinôme. — Soit

$$y = ax^2 + bx + c$$

un trinôme du second degré. Mettons a en facteur dans ce trinôme ; il s'écrit :

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

ou

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Remarquons, comme nous l'avons déjà fait plus haut, que $x^2 + 2\dfrac{b}{2a}x$ sont les deux premiers termes du développement du carré de $x + \dfrac{b}{2a}$; et pour avoir ce carré complet, il faut leur ajouter $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{4a^2}$. Ajoutons donc et retran-

chons, pour ne rien changer, $\frac{b^2}{4a^2}$ dans la parenthèse. Le trinôme s'écrit alors :

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

ou

(I) $$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Nous obtenons ainsi une première forme de décomposition du trinôme qui peut aussi s'écrire :

(I *bis*) $$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

La quantité $b^2 - 4ac$, que nous avons déjà rencontrée plus haut, est ce qu'on appelle encore le *discriminant* du trinôme.

Pour aller plus loin, *supposons* $b^2 - 4ac$ *positif*. Dans ce cas, $b^2 - 4ac$ peut être considéré comme le carré de $\sqrt{b^2 - 4ac}$,et on peut écrire le trinôme y sous la nouvelle forme :

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

La quantité entre crochets apparaît ainsi comme la différence de deux carrés. On peut donc la décomposer (n° **52**) en un produit d'une somme par une différence. Le trinôme s'écrit alors :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Posons, pour abréger,

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \end{cases}$$

Ces nombres x' et x'' sont alors les racines de l'équation du second degré obtenue en égalant à zéro le trinôme. Et le trinôme s'écrit enfin sous la dernière forme que voici :

$$\text{(II)} \qquad y = a(x - x')(x - x''),$$

qui n'est applicable que dans le cas où le discriminant $b^2 - 4ac$ est *positif*.

270. — Signes du trinôme. — Les décompositions que nous venons d'effectuer vont nous permettre de résoudre aisément cette question importante :

Reconnaître, a priori, *le signe de la valeur numérique que prend un trinôme du second degré pour une valeur donnée de la variable.*

A cet effet, nous distinguerons trois cas, suivant le signe du discriminant.

271. — Premier cas : $b^2 - 4ac < 0$. — Lorsque $b^2 - 4ac$ est négatif, $4ac - b^2$ est *positif* et la forme

$$\text{(I } bis\text{)} \qquad y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

met immédiatement le signe de y en évidence.

En effet, la quantité entre crochets est une somme de deux nombres *positifs* dont le second n'est pas nul. Cette quantité est donc toujours positive et jamais nulle; y est toujours du signe de a. Donc :

Lorsque le discriminant est négatif, le trinôme n'est jamais nul et toujours du signe de son premier terme.

272. — Deuxième cas, $b^2 - 4ac = 0$. — Dans ce cas, la forme de décomposition (I) se réduit à

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Le trinôme est *carré parfait.* Comme $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ est toujours positif, sauf pour la valeur $x=-\frac{b}{2a}$ pour laquelle il s'annule, y est toujours du signe de a, sauf pour

$$x=-\frac{b}{2a}.$$

Donc :

Lorsque le discriminant est nul, le trinôme est toujours du signe de son premier terme, sauf pour la valeur $x=-\frac{b}{2a}$ ***pour laquelle il est nul.***

273. — Troisième cas, $b^2-4ac>0$. — L'équation obtenue en égalant le trinôme à zéro a alors deux racines x' et x'' et le trinôme se met sous la forme (**II**) :

$$y=a(x-x')(x-x'').$$

Supposons, pour fixer les idées, $x'>x''$:

1° Si x est plus grand que x', il est *a fortiori* plus grand que x''; les deux différences $x-x'$ et $x-x''$ sont positives, leur produit est positif et y est du signe de a.

2° Si x est compris entre x' et x'', $x-x'$ est négatif, $x-x''$ est positif; leur produit est négatif, y est alors de signe contraire au signe de a.

3° Si x est plus petit que x'', il est *a fortiori* plus petit que x'; les deux différences $x-x'$ et $x-x''$ sont toutes deux négatives et leur produit est positif, y est, par suite, du signe de a.

4° Si x est égal à l'un des deux nombres x' ou x'', l'une des deux différences $x-x'$ ou $x-x''$ est nulle et y a la valeur *zéro*. *En résumé :*

Lorsque le discriminant est positif, le trinôme a deux racines.

Lorsque x ***n'est pas compris entre ces racines, le trinôme est du signe de son premier terme.***

Lorsque x est compris entre les racines, le trinôme est de signe contraire au signe du premier terme.

Lorsque x est égal à l'une des deux racines, le trinôme a la valeur zéro.

274. — Exemples. — Le trinôme x^2+x+1 a un discriminant négatif égal à -3. Donc pour toute valeur de x il prend une valeur numérique *non nulle* et *positive*.

Le trinôme x^2-4x+4 a un discriminant nul. Il est carré parfait car

$$x^2-4x+4=(x-2)^2.$$

Pour toute valeur de x il a une valeur *positive*; sauf pour $x=2$ pour laquelle il a la valeur *zéro*.

Le trinôme x^2-8x+7 a un discriminant positif. L'équation

$$x^2-8x+7=0$$

a deux racines qui sont 7 et 1. Ce trinôme s'écrit donc :

$$x^2-8x+7=(x-1)(x-7).$$

Pour toute valeur de x supérieure à 7 ou inférieure à 1, il a une valeur positive. Pour toute valeur de x comprise entre 1 et 7 il prend une valeur négative. Enfin, pour $x=1$ ou $x=7$ il prend la valeur *zéro*.

Par exemple, pour $x=2$ le trinôme doit avoir une valeur négative. Cette valeur est en effet

$$4-16+7=-5.$$

275. Remarque importante. — De ce qui précède, il résulte que :

La valeur numérique d'un trinôme du second degré est toujours du signe de son premier terme, sauf dans le seul cas où le trinôme a deux racines et où on donne à la variable une valeur comprise entre ces racines.

On en conclut alors que :

Si, en remplaçant dans le premier membre d'une équation du second degré x par un nombre, le résultat de substitution est de signe contraire au signe du premier terme de l'équation, on peut affirmer que l'équation a deux racines et que le nombre substitué est compris entre ces racines.

Ainsi, considérons l'équation

$$2x^2-15x+12=0.$$

Si, dans le premier membre nous faisons $x = 1$, ce premier membre prend la valeur

$$2 - 15 + 12 = -1.$$

Cette valeur est négative, on peut donc affirmer que l'équation a deux racines : l'une plus petite que 1, l'autre plus grande que 1.

276. Application. — *Reconnaître la position d'un nombre par rapport aux racines d'une équation du second degré, sans avoir calculé ces racines.*

Considérons une équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = o;$$

et supposons que $b^2 - 4ac$ soit positif. L'équation a alors deux racines. Appelons x' la plus grande et x'' la plus petite :

$$x' > x''.$$

Désignons pour abréger par $f(x)$ [ce qui se lit f d'x] le premier membre de l'équation :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Pour désigner la valeur numérique de ce trinôme pour une certaine valeur de x, nous remplacerons dans $f(x)$ la lettre x par cette valeur. Ainsi $f(1)$ désigne la valeur numérique de $f(x)$ pour $x = 1$; $f(2)$ sa valeur pour $x = 2$; et ainsi de suite.

Ceci posé, soit α un nombre quelconque. Proposons-nous de savoir quel est l'ordre de grandeur de α par rapport aux racines x' et x'' *sans les avoir calculées.*

A cet effet, calculons la valeur numérique $f(\alpha)$ du trinôme $f(x)$ pour $x = \alpha$.

Trois cas peuvent se présenter.

Si $af(\alpha) > o$, d'après les résultats du n° **273**, α n'est pas compris entre les racines.

Si $af(\alpha) < o$ (n° **273**), α est compris entre les racines :

$$x'' < \alpha < x'.$$

Si $f(\alpha)=0$, α est égal à l'une des deux racines et on a

$$\text{soit} \quad \alpha = x', \qquad \text{soit} \quad \alpha = x''.$$

Lorsque $af(\alpha)>0$, on sait seulement que α n'est pas compris entre les racines. Il reste encore à distinguer si α est plus grand que la plus grande ou plus petit que la plus petite.

Pour cela, remarquons que la demi-somme des racines

$$\frac{x'+x''}{2} = -\frac{b}{2a}$$

est un nombre certainement compris entre x' et x'' :

$$x'' < -\frac{b}{2a} < x'.$$

on comparera donc α à $-\frac{b}{2a}$.

Si $\alpha > -\frac{b}{2a}$, α sera plus grand que x'.

Si $\alpha < -\frac{b}{2a}$, α sera plus petit que x''.

Tous ces résultats peuvent se résumer dans le tableau suivant :

deux racines	$b^2-4ac>0$; $x'>x''$.
$af(\alpha)>0$	$\begin{cases} \alpha > -\frac{b}{2a}, & \alpha > x'; \\ \alpha < -\frac{b}{2a}, & \alpha < x''. \end{cases}$
$af(\alpha)<0$	$x''<\alpha<x'$.
$f(\alpha)=0$	$\alpha=x'$ ou $\alpha=x''$.

Exemple. — Soit l'équation du second degré

$$5x^2-7x+1=0.$$

Le discriminant $b^2 - 4ac = 49 - 20 = 29$ est positif.

Considérons le nombre 2. Pour reconnaître sa position par rapport aux racines, substituons 2 dans le premier membre de l'équation que nous appelons $f(x)$. Nous aurons :

$$f(2) = 20 - 14 + 1 > 0.$$

2 n'est pas compris entre les racines. Comparons alors 2 à la demi-somme $\frac{7}{10}$ des racines, on a :

$$2 > \frac{7}{10}.$$

Donc 2 *est plus grand que la plus grande racine.*

Considérons encore le nombre $\frac{1}{2}$, on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} - \frac{7}{2} + 1 = \frac{-5}{4} < 0.$$

Donc $\frac{1}{2}$ *est compris entre les racines.*

277. Résolution des inégalités du second degré. — Une inégalité conditionnelle est dite du second degré lorsqu'en faisant passer tous les termes dans un membre, et toutes réductions faites, elle prend la forme :

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Résoudre cette inégalité, c'est trouver les valeurs de x pour lesquelles le trinôme $ax^2 + bx + c$ prend une valeur numérique positive. Or, d'après ce qui précède, les signes des valeurs numériques que peut prendre ce trinôme dépendent du signe du discriminant.

On formera donc avant tout le discriminant $b^2 - 4ac$.

1° Si $b^2 - 4ac < 0$, le trinôme a toujours le signe de a. Il en résulte que :

Si $a > 0$, *l'inégalité est vérifiée pour toute valeur de x ;*

Si $a < 0$, *l'inégalité n'est jamais vérifiée.*

2° Si $b^2 - 4ac = 0$, le trinôme a toujours le signe de a, sauf pour $x = -\frac{b}{2a}$.

Donc :

Si $a > 0$, *l'inégalité est vérifiée pour toutes les valeurs de x, sauf pour* $x = -\frac{b}{2a}$.

Si $a < 0$, *l'inégalité n'est jamais vérifiée.*

3° Si $b^2 - 4ac > 0$, le trinôme a alors deux racines x' et x'' qu'on calculera ($x' > x''$).

Si $a > 0$, pour que l'inégalité soit vérifiée, le trinôme devra être du signe de a, par suite *x ne devra pas être compris entre les racines.*

On devra avoir :

$$\text{soit} \quad x > x', \qquad \text{soit} \quad x < x''.$$

Si $a < 0$, pour que l'inégalité soit vérifiée, il faudra que le trinôme soit de signe contraire au signe de a, par suite, *x devra être compris entre les racines.*

On devra donc avoir :

$$x'' < x < x'.$$

Remarque. — Si on avait mis l'inégalité sous la forme

$$ax^2 + bx + c < 0,$$

on aurait obtenu des conclusions analogues.

278. — Exemple I. — *Résoudre l'inégalité*

$$x^2 + x + 3 > 0.$$

Le discriminant $b^2 - 4ac = 1 - 12 = -11$ est négatif.

Le trinôme est donc toujours du signe de son premier terme, c'est-à-dire positif.

L'inégalité est vérifiée quel que soit x.

279. — Exemple II. — *Résoudre l'inégalité*

$$2(x - 1)(x - 2) < (x + 1)(x - 3).$$

Développons les deux membres il vient :

$$2x^2 - 6x + 4 < x^2 - 2x - 3.$$

En faisant tout passer dans le premier membre, l'inégalité s'écrit :

$$x^2 - 4x + 7 < 0.$$

Le discriminant $16 - 28 = -12$ est négatif.
Le trinôme $x^2 - 4x + 7$ est donc toujours positif.
L'inégalité n'est jamais vérifiée.

280. — Exemple III. — *Résoudre l'inégalité.*

$$\frac{x-1}{x-2} > \frac{x-3}{x-4}.$$

Faisons tout passer dans le premier membre :

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{x-4} > 0.$$

Réduisons les deux fractions au même dénominateur. Mais *nous nous garderons bien de chasser le dénominateur*, car comme nous ne savons pas si le dénominateur est *positif*, nous n'avons pas le droit de multiplier les deux membres par ce dénominateur.

L'inégalité s'écrit alors :

$$\frac{(x-1)(x-4)-(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)} > 0.$$

ou

$$\frac{-2}{(x-2)(x-4)} > 0.$$

Pour que la fraction soit positive, il faut et il suffit que le dénominateur soit *négatif*. On doit donc avoir

$$(x-2)(x-4) < 0.$$

Si on effectuait ce produit on aurait un trinôme de second degré. Il faut bien se garder de le faire. En effet, sous cette forme on voit que le premier membre est un trinôme qui a deux racines qui sont 2 et 4.

Le premier terme est x^2 qui est positif. Donc, pour que l'inégalité soit vérifiée, il faut et il suffit que x soit compris entre les racines. Finalement on doit avoir :

$$2 < x < 4.$$

§ 4. — Problèmes du second degré.

281. — Généralités. — On dit qu'un problème est du *second degré* s'il conduit à la résolution d'une équation du second degré à une inconnue et d'un nombre quelconque d'équations du premier degré

La mise en équation d'un tel problème s'effectue comme dans le cas des équations du premier degré.

On désigne par des lettres les inconnues et on écrit les relations qui permettraient de vérifier l'exactitude du résultat, si les valeurs des inconnues étaient connues.

On résout ensuite l'équation du second degré obtenue. Cette équation pourra avoir 0, 1 ou 2 racines. Le problème pourra donc avoir 0, 1 ou 2 solutions.

Traitons d'abord quelques exemples simples.

282. — Problème I. — *Trouver deux nombres connaissant leur différence 7 et leur produit* 60.

Désignons par x le *plus petit* des deux nombres. Le plus grand sera $7 + x$.

D'après l'énoncé, si x est le nombre cherché, le produit $x(7 + x)$ doit être égal à 60.

On a donc l'équation :

$$x(7 + x) = 60$$

ou

$$x^2 + 7x - 60 = 0.$$

Comme les termes extrêmes sont de signes contraires, cette équation a deux racines, l'une positive et l'autre négative. Ces deux racines sont :

$$x' = \frac{-7 + \sqrt{289}}{2} = 5,$$

$$x'' = \frac{-7 - \sqrt{289}}{2} = -12.$$

Il y a donc deux solutions qui sont : 5 et 12 ; — 5 et — 12.

283. — PROBLÈME II. — *Calculer les dimensions d'un rectangle connaissant son périmètre* 20^m *et son aire qui est de* 21^mq.

Le périmètre est égal à la somme des quatre côtés, deux à deux égaux, du rectangle. La somme des deux côtés inégaux est donc égale au demi-périmètre, soit à 10^m.

Désignons par x l'un des côtés; l'autre sera égal à $10 - x$.

Or, l'aire d'un rectangle est égale au produit de ses deux dimensions. Si donc x est le côté cherché, on doit avoir :

$$x(10 - x) = 21$$

ou

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Cette équation a deux racines qui sont :

$$x' = 5 + \sqrt{25 - 21} = 7,$$
$$x'' = 5 - \sqrt{25 - 21} = 3.$$

Si l'un des côtés du rectangle est de 7^m, l'autre sera de $10 - 7 = 3$^m; au contraire, si on prend pour le premier côté 3^m, le second est $10 - 3 = 7$^m. On ne trouve au fond qu'*une* solution. Le rectangle cherché a pour dimensions 7^m et 3^m. Ceci tient à ce que l'équation formée admet pour racine la longueur de l'un *quelconque* des côtés. Les deux racines doivent donc être chacune un côté.

REMARQUE. — On aurait pu traiter cette question plus élégamment en se servant des relations entre les coefficients et les racines d'une équation du second degré. En effet, les deux dimensions cherchées ont pour somme 10 et pour produit 21. On est donc ramené à trouver deux nombres connaissant leur somme 10 et le produit 21. D'après ce que nous avons dit plus haut (n° **263**), ces deux nombres sont racines de l'équation du second degré :

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

284. — Problème III. — ***Division en moyenne et extrême raison.*** — *Étant donnés sur un axe deux points* A *et* B, *trouver sur cet axe un point* M *tel que l'on ait* (fig. 30) :

$$\overline{AM}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{AB}, \qquad (1)$$

en grandeur et en signe.

Prenons comme sens positif sur l'axe le sens de A vers B et soit :

$$\overline{AB} = a.$$

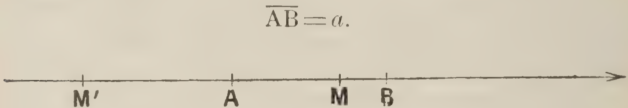


Fig. 30.

Désignons par x l'abscisse du point M comptée avec l'origine A :

$$\overline{AM} = x.$$

On a, alors, comme nous savons (n° **80**)

$$\overline{MB} = \overline{AB} - \overline{AM} = a - x.$$

D'après l'égalité (1) de l'énoncé, si x est l'abscisse cherchée, on doit avoir :

$$x^2 = (a - x)\,a$$

ou

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Cette équation a toujours deux racines de signes contraires, puisque les termes extrêmes sont de signes contraires. Ces deux racines sont :

$$x' = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a\,[\sqrt{5} - 1]}{2},$$

$$x'' = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = -\frac{a\,[\sqrt{5} + 1]}{2}.$$

La première solution x' est positive, elle est d'ailleurs plus petite que a, car elle est égale environ à $0{,}6 \cdot a$.

Il lui correspond un point M (fig. 30) situé entre A et B.

La seconde solution x'' est négative et égale environ à $-1{,}6 \cdot a$.

Il lui correspond un point M′ (fig. 30) situé du côté négatif, c'est-à-dire de l'autre côté de A que le point B.

285. — Discussions. — Lorsque les données sont *littérales*, il peut arriver que, suivant les grandeurs relatives de ces données, le problème admette ou n'admette pas de solution.

Reconnaître, suivant les cas, le nombre des solutions du problème, c'est ce qu'on appelle *discuter* le problème.

Donnons d'abord quelques exemples simples et, pour cela, reprenons les problèmes I et II en substituant des lettres aux données numériques.

286. — Problème I généralisé. — *Trouver deux nombres connaissant leur différence* d *et leur produit* p.

Soit x le plus petit des deux nombres. Le plus grand sera $d+x$.

Si x est bien le nombre cherché on doit avoir, d'après l'énoncé :

$$x(d+x)=p$$

ou

$$x^2+dx-p=0.$$

Nous avons là une équation du second degré.

Pour *discuter*, suivons la marche indiquée au n° **267**.

Le produit des racines est $-p$, donc :

1° Si $p>0$, le produit est négatif. L'équation a certainement deux racines de signes contraires et la plus grande en valeur absolue est du signe de $-d$.

2° Si $p<0$, il faut calculer le discriminant qui est :

$$\frac{d^2}{4}+p.$$

Nous avons alors trois cas :

a) Si $\frac{d^2}{4}+p>0$, c'est-à-dire si

$$-\frac{d^2}{4}<p<0$$

l'équation a deux racines de même signe et du signe de $-d$.

b) Si $\frac{d^2}{4}+p<0$, c'est-à-dire si

$$p<-\frac{d^2}{4}$$

l'équation n'a pas de racines.

c) Si $p=-\frac{d^2}{4}$, l'équation a une seule racine (double) égale à $-\frac{d}{2}$.

3° Si $p=0$, l'équation a une racine *nulle* et une racine égale à $-d$.

Résumé. —

$$p>-\frac{d^2}{4}, \text{ deux solutions.}$$

$$p=-\frac{d^2}{4}, \text{ une seule solution.}$$

$$p<-\frac{d^2}{4} \text{ pas de solution}$$

On remarquera que la *plus petite* valeur que puisse prendre p pour que le problème ait au moins une solution est $-\frac{d^2}{4}$. On peut donc dire que : *le minimum du produit de deux nombres dont la différence est égale à d est égale à* $-\frac{d^2}{4}$, car il n'existe pas de nombres ayant pour différence d et dont le produit soit plus petit que $-\frac{d^2}{4}$.

287. — Problème II généralisé. — *Trouver les deux dimensions d'un rectangle connaissant son périmètre* 2p *et un carré* a^2 *de même aire.*

La somme des deux dimensions cherchées est égale au *demi-périmètre* p, leur produit est égal à a^2. Nous sommes donc ramenés à trouver deux nombres connaissant leur somme p et leur produit a^2. Ces deux nombres sont racines (n° **263**) de l'équation du second degré

$$x^2 - px + a^2 = 0.$$

Pour que cette équation ait des racines, il faut que le discriminant $\frac{p^2}{4} - a^2$ soit positif.

Donc :

Si $a^2 < \frac{p^2}{4}$, une solution qui est un rectangle;

Si $a^2 = \frac{p^2}{4}$, une solution qui est un carré;

Si $a^2 > \frac{p^2}{4}$, pas de solution.

Dans le cas où $a^2 = \frac{p^2}{4}$ le discriminant est en effet nul, les deux racines de l'équation sont égales, le rectangle a ses deux dimensions égales, c'est donc bien un carré.

Remarque. — On voit que, pour que le rectangle existe, il faut que l'on ait

$$a^2 \leqslant \frac{p^2}{4}$$

et, lorsque $a^2 = \frac{p^2}{4}$ le rectangle est un carré.

On peut donc dire que : *parmi tous les rectangles de même périmètre, celui qui a la plus grande aire est le carré*, car il n'y a pas de rectangle ayant une aire supérieure à $\frac{p^2}{4}$ qui est l'aire du carré de périmètre $2p$.

L'inégalité précédente peut encore s'écrire :

$$p^2 \geqslant 4a^2, \qquad \text{ou} \qquad p \geqslant 2a, \qquad \text{ou} \qquad 2p \geqslant 4a.$$

Elle exprime alors que pour que le rectangle existe, il faut que le périmètre $2p$ soit supérieur ou au moins égal à $4a$ qui est le périmètre du carré donné. Lorsque $2p = 4a$,

le rectangle est le carré donné. Ceci exprime que : *parmi tous les rectangles de même aire qu'un carré donné, c'est ce carré qui a le plus petit périmètre.*

288. — Cas où les valeurs de l'inconnue sont limitées. — Dans les exemples qui précèdent, le problème avait toujours des solutions lorsque l'équation avait des racines. La discussion se réduisait donc à reconnaître le signe du discriminant.

Mais il arrive souvent, surtout dans les problèmes d'origine géométrique, que, pour qu'il existe une solution, il faut non seulement que l'équation du second degré ait des racines, mais encore que ces racines soient comprises dans certaines limites.

Par exemple, si l'inconnue x est le côté d'un triangle dont on connaît la somme s des deux autres côtés, une valeur de x ne sera acceptable que si l'on a

$$x < s,$$

car dans un triangle un côté doit être plus petit que la somme des deux autres.

Dans de pareils cas, la discussion consistera à reconnaître non seulement s'il existe des racines, mais encore si ces racines sont comprises dans les limites assignées.

Par exemple, supposons que l'inconnue x satisfasse à une équation du second degré

$$f(x) = 0$$

et que l'on sache, en outre, qu'il faut que cette inconnue soit plus petite qu'un certain nombre α. Il faudra alors voir si l'équation a des racines et, lorsqu'elle en a, *comparer ces racines au nombre* α. Nous sommes ainsi ramenés à traiter une question étudiée au n° **276**. Cette comparaison se fait en étudiant le signe de $f(\alpha)$.

Ici se place une remarque très importante.

Nous avons vu (nº **275**) que si $f(\alpha)$ est de signe contraire au signe du premier terme de $f(x)$, on peut affirmer que l'équation a deux racines et que α est compris entre ces racines. Dans ce cas, on reconnaîtrait donc l'existence des racines *sans avoir formé le discriminant.*

On conclut de là que, comme dans tous les cas on sera toujours obligé de calculer $f(\alpha)$, il y a avantage à faire ce calcul *en premier* car ainsi, lorsque $af(\alpha) < 0$, on *évite le calcul du discriminant.*

289. — **Résumé.** — De ce qui précède, on conclut qu'il sera, en général, bon de suivre la marche que voici pour faire la discussion :

Lorsque les solutions, pour être acceptables, doivent être comprises dans certaines limites : on substituera d'abord ces limites dans le premier membre de l'équation :

1° *Si l'un des résultats est de signe contraire au signe du premier terme, on peut affirmer que l'équation du second degré a deux racines et on connaît leur position par rapport aux limites* (le calcul du discriminant est inutile).

2° *Si les résultats de substitution sont tous du signe du premier terme, il faut calculer le discriminant et ensuite comparer les limites à la demi-somme des racines.*

Appliquons ceci à un exemple.

290. — PROBLÈME III. — *Calculer les deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse* a *et la somme* l *de ces deux côtés.*

Soient x et y les deux côtés inconnus, on devra avoir :

(1)
$$x + y = l,$$
$$x^2 + y^2 = a^2.$$

De la première on tire :

(2)
$$y = l - x.$$

et, en portant dans la seconde, on obtient :

$$x^2 + (l - x)^2 = a^2.$$

(3) ou $$2x^2 - 2lx + l^2 - a^2 = 0.$$

De cette équation on tirera x et, connaissant x, la formule (2) donnera y.

Discussion. — Pour que le problème admette des solutions, il faut qu'il existe des valeurs de x et y *positives* vérifiant ces égalités (1) et (2). Or, pour que y soit positif, il faut que x soit plus petit que l. Donc il faut et il suffit que l'équation (3) admette des racines *positives* et plus petites que l

$$0 < x < l.$$

Soit $f(x)$ le premier membre de l'équation (3)

$$f(x) = 2x^2 - 2lx + l^2 - a^2.$$

Calculons $f(0)$ et $f(l)$. Nous avons :

$$f(0) = l^2 - a^2,$$
$$f(l) = l^2 - a^2.$$

1° Si $l < a$, $f(0)$ et $f(l)$ sont tous deux négatifs, l'équation (3) a donc certainement deux racines x' et x'' ; et 0 et l sont tous deux compris entre ces racines. On a ainsi :

$$x' < 0 < l < x''$$

Aucune des deux racines ne convient, *le problème n'a pas de solution.*

2° Si $l > a$, $f(0)$ et $f(l)$ sont tous deux positifs, il faut alors former le discriminant. Or on a :

$$b'^2 - ac = l^2 - 2(l^2 - a^2) = 2a^2 - l^2 ;$$

pour qu'il soit positif, il faut avoir :

$$l^2 < 2a^2$$

ou $$l < a\sqrt{2}.$$

Si cette condition est remplie, l'équation a deux racines

x' et x'' et aucun des deux nombres o et l n'est compris entre ces racines. Comme la demi-somme des racines est $\frac{l}{2}$, o est plus petit que la plus petite et l plus grand que la plus grande. On a donc :

$$0 < x'' < x' < l.$$

Les deux racines sont acceptables.

Le problème a donc, *en apparence*, deux solutions

$$x = x', \ y = l - x';$$
$$x = x'', \ y = l - x''.$$

Mais ces deux solutions ne sont pas distinctes; elles fournissent *le même triangle*. En effet, la somme des racines de l'équation (3) est l.

On a donc $$x' + x'' = l,$$
$$l - x' = x'' \quad \text{et} \quad l - x'' = x'.$$

Les deux solutions sont alors

$$x = x', \ y = x'';$$
$$x = x'', \ y = x'.$$

Elles donnent bien le même triangle dont les deux côtés de l'angle droit sont x' et x''.

Cas limites. — Si on avait $l = a$, l'équation (3) aurait une racine nulle. Il n'y aurait donc pas de solution à proprement parler.

Si on avait $l = a\sqrt{2}$ l'équation (3) aurait ses racines égales, on aurait

$$x' = x'',$$

le triangle serait isocèle.

Résumé. — La discussion précédente se résume ainsi

$$l \leqslant a, \quad \text{pas de solution;}$$
$$a < l \leqslant a\sqrt{2}, \ \text{une solution;}$$
$$l > a\sqrt{2}, \ \text{pas de solution.}$$

291. — REMARQUE. — On aurait pu résoudre le système d'équations (1) précédent d'une façon plus élégante, qui aurait conduit à une discussion plus simple.

Si, en effet, on remarque que l'on a l'*identité*

$$x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2$$

on aura, en y remplaçant $x^2 + y^2$ et $x + y$ par leurs valeurs,

$$a^2 + 2xy = l^2$$

d'où l'on tire $$xy = \frac{l^2 - a^2}{2}.$$

On voit ainsi que x et y sont deux nombres dont on connaît la somme l et le produit $\frac{l^2 - a^2}{2}$: ce sont donc les racines de l'équation du second degré :

$$x^2 - lx + \frac{l^2 - a^2}{2} = 0$$

ou $$2x^2 - 2lx + l^2 - a^2 = 0.$$

On retrouve l'équation (3). Mais ici on voit qu'il suffit que cette équation ait deux racines positives.

Pour que les deux racines *existent* il faut que

$$l^2 \leqslant 2a^2$$

Pour qu'elles soient *positives* il suffit que leur produit soit positif puisque la somme est positive. Ce qui donne

$$l^2 > a^2.$$

On voit alors que, pour qu'il y ait une solution, il faut et il suffit qu'on ait :

$$a^2 < l^2 \leqslant 2a^2$$

ou $$a < l \leqslant a\sqrt{2}.$$

292. — Équation du second degré, dans le cas où l'inconnue est une variable restreinte. — Il peut arriver que l'inconnue choisie soit une variable qui ne peut varier que dans certaines limites. Dans ce cas, le problème n'a évidemment de solutions que si les racines des équations trouvées sont comprises dans ces limites.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de résoudre l'équation :

$$(1) \qquad 2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0.$$

A cet effet, nous chercherons d'abord les valeurs de $\sin x$, considéré comme une inconnue ; puis, connaissant ces valeurs, nous obtiendrons, au moyen des tables, les valeurs correspondantes de l'arc x.

Or, comme $\sin x$ reste toujours compris entre -1 et $+1$, il n'existera des valeurs de x vérifiant (1) que s'il existe des valeurs de $\sin x$ comprises entre -1 et $+1$.

Nous commencerons (n° **289**) par substituer dans le premier membre de l'équation (1) à $\sin x$ (et non pas à x) les valeurs -1 et $+1$. La substitution de -1 donne : $+12$; celle de $+1$ donne -2. Il en résulte que l'équation (1) a des racines en $\sin x$; que $+1$ est compris entre ces racines et que -1 n'est pas compris entre ces racines. Il y a donc une seule racine comprise entre -1 et $+1$, et c'est la plus petite :

$$\sin x = \frac{7 - \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Il reste à trouver tous les arcs x dont le sinus est $\frac{1}{2}$. Si x désigne la *longueur* de l'arc, mesuré avec le rayon pris pour unité, l'un de ces arcs est $\frac{\pi}{6}$, les autres sont :

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}.$$

293. — Remarque. — Ce que nous venons de dire ne s'applique évidemment pas au cas où l'inconnue serait $\tan x$ ou $\cot x$, car la tangente et la cotangente d'un arc

pouvant prendre toutes les valeurs possibles, il n'y a aucune discussion spéciale à faire et toute racine de l'équation du second degré fournit des valeurs pour l'arc.

294. Problème IV. — *Étant donné un demi-cercle de diamètre* AB, *trouver sur ce demi-cercle un point* M *tel que si l'on abaisse de ce point la perpendiculaire* MP *sur le diamètre* AB *on ait*

$$AM + 2\,AP = 2\,l,$$

l *étant une longueur donnée.*

Prenons comme inconnue l'angle $\widehat{AOM} = x$ sous lequel on voit l'arc AM du centre O du cercle. Dans un cercle de rayon 1, une corde est le double du sinus de la moitié de l'arc sous-tendu. Si donc on désigne par R le rayon du cercle, on a :

$$AM = 2\,R\,\sin\frac{x}{2}.$$

D'autre part,

$$AP = AO - \overline{OP} = R - R\cos x = 2\,R\sin^2\frac{x}{2}.$$

On doit donc avoir :

$$4\,R\sin^2\frac{x}{2} + 2\,R\,\sin\frac{x}{2} = 2\,l,$$

ou :

$$(1) \qquad 2\,R\sin^2\frac{x}{2} + R\sin\frac{x}{2} - l = 0.$$

Discussion. — Substituons, de suite, dans le premier membre -1 et $+1$ à $\sin\frac{x}{2}$. La substitution de -1 donne $R - l$; celle de $+1$ donne $3\,R - l$.

1° si $l > 3\,R$, ces deux résultats sont négatifs. L'équation (1) a deux racines qui comprennent -1 et $+1$. Le problème *n'a pas de solution.*

2° Si $R < l < 3R$, le résultat de substitution de -1 est négatif, celui de $+1$ est positif. Il y a une seule valeur de $\sin\frac{x}{2}$ comprise entre -1 et $+1$ et c'est la plus grande. Toutes les solutions sont données par :

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{R + \sqrt{R^2 + 8\,Rl}}{4\,R}.$$

3° Si $l < R$, les deux résultats sont positifs, mais comme le produit des racines est négatif, l'équation (1) a deux racines de signes contraires, et toutes deux sont comprises entre -1 et $+1$. Il y a deux séries de solutions données par :

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 8\,R\,l}}{4\,R},$$

EXERCICES

ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

271. Résoudre l'équation :

$$\frac{x+2}{1+2x}=\frac{3x+4}{3+4x}.$$

272. Résoudre l'équation :

$$\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-9}=1.$$

273. Simplifier et résoudre l'équation :

$$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\ \frac{2x-3}{x-1}+\frac{3x-1}{2(x-1)}=\frac{3}{2}\ \frac{x^2+2}{3x-2}$$

274. Résoudre l'équation :

$$\frac{a+x}{b+x}+\frac{b+x}{a+x}=\frac{5}{2}.$$

275. Résoudre l'équation :

$$\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x(x-1)}=7.$$

276. Résoudre l'équation :

$$\frac{5x+3}{x-1}+\frac{2x-3}{x-2}=9.$$

277. Résoudre les équations :

$$\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x-7}{x-1}=4-\frac{3x-1}{x+2}; \qquad \frac{x-\frac{10}{3}}{5}+\frac{9}{3x-31}=3.$$

278. Résoudre l'équation :

$$\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}.$$

279. Résoudre les équations :

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}=\frac{6x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)};$$

$$x(x-2)(x-3)+x(x-3)(x-1)+x(x-1)(x-2)$$
$$=3(x-1)(x-2)(x-3).$$

280. Résoudre les équations :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}; \qquad \frac{a}{x}+\frac{a-1}{x-1}=2; \qquad \frac{x}{a}+\frac{a-1}{x-1}=2.$$

281. Résoudre l'équation :

$$(b+ax)(a-bx)+(c+bx)(b-cx)+(a+cx)(c-ax)=0.$$

282. Résoudre l'équation :

$$1+bx+\frac{x^2}{a-x}=\frac{a^2}{a-x}.$$

283. Résoudre les équations :

$$x^2-2bx+b^2-a^2=0;$$

$$(x+a)(x-b)(2a-x)=(x-a)(x+b)(2b-x);$$

$$\frac{8}{x-1}+8x=\frac{5x}{3}+40.$$

284. Résoudre les équations :

$$\frac{7}{5(x-3)}-\frac{8}{3(x-15)}=\frac{11}{4x-25}; \qquad (a^2-b^2)x^2-2ax+1=0.$$

285. Résoudre les équations :

$$\left(\frac{m+x}{m-x}\right)^2=1+\frac{px}{mn}; \qquad \frac{(m-n)x^2}{m+n}-(m-n)^2x+m-n=\frac{x}{m+n}.$$

286. Résoudre les équations :

$$\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}; \qquad \frac{a+b}{x+b}+\frac{a+c}{x+c}=\frac{2(a+b+c)}{x+b+c}.$$

287. Résoudre l'équation :

$$\frac{(x+a)(x+a+b)}{(x+c)(x+c+b)}=\frac{(x-a)(x-a-b)}{(x-c)(x-c-b)}.$$

288. Résoudre l'équation :

$$x+\cfrac{1}{x+a+\cfrac{1}{x+b}}=x+\cfrac{1}{x-a+\cfrac{1}{x-b}}.$$

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS.

289. Résoudre le système :

$$x-y=3xy \quad ; \quad x+y=7xy.$$

290. Résoudre le système :

$$x+y=a+\frac{b^2}{a}; \qquad xy=\frac{b^4}{a^2}.$$

291. Résoudre le système d'équations :

$$x+y=5-xy; \qquad x+y=\frac{6}{xy}.$$

292. Résoudre le système :

$$x(y+z)=20; \qquad y(x+z)=18; \qquad z(x+y)=14.$$

293. Résoudre les équations :

$$5(x+y)=xy; \qquad 2x+3y=40.$$

294. Résoudre :

$$x+y=5; \qquad 7x^2-3y^2+5xy-2x-27=0.$$

295. Résoudre le système :

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{3}; \qquad \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{1}{4}.$$

296. Résoudre le système des trois équations :

$$x+y+z=a; \qquad xy=b^2; \qquad \frac{y}{z}=c.$$

Quelles sont les limites entre lesquelles doit varier c pour qu'il existe des valeurs pour les trois inconnues x, y, z ? (a et b sont supposés constants).

297. Résoudre le système d'équations :

$$ax=by=cz=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

298. Résoudre le système d'équations :

$$x+y=xy; \qquad x+y=x^2-y^2.$$

299. Résoudre :

$$xy+a(x+y)=p; \qquad x^2+y^2+b(x+y)=q.$$

300. Résoudre le système :

$$x+y+z=1; \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1; \qquad ax+by+cz=1.$$

301. Résoudre le système des équations :

$$mxy-x^2-y^2=1; \qquad m(ay+bx)-2(ax+by)=0,$$

dans lequel les quantités a et b sont liées par la relation :

$$mab-a^2-b^2=1.$$

302. Résoudre le système :

$$15(x+y)=8xy; \qquad x+y+x^2+y^2=42.$$

303. Résoudre et discuter le système :

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0; \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

304. Résoudre les équations :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{c}; \qquad \frac{1}{a-x}+\frac{1}{a-y}=\frac{2}{a-b}.$$

305. Résoudre les équations :

$$\frac{3a^2}{4x}+\frac{b^2}{4y}=1\,; \qquad x-y=a^2-b^2.$$

306. Déterminer m de façon que dans le système :

$$(5m+4)x-(2m+3)y=-2, \qquad (3m-8)x+(2m-1)y=18,$$

y ait pour valeur $3x$.

RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS ET LES RACINES

307. Former l'équation du second degré qui a pour racines

$$-\frac{21}{4} \quad \text{et} \quad +\frac{3}{11}.$$

308. Former les équations du second degré ayant pour racines :

$$2 \text{ et } -3\,; \qquad -2 \text{ et } +3\,;$$

$$1-\sqrt{2} \text{ et } 1+\sqrt{2}\,; \qquad 4+\sqrt{7} \text{ et } -4-\sqrt{7}\,;$$

$$(a+b) \text{ et } (a-b).$$

309. Former l'équation du second degré ayant pour racines le produit et la somme des racines de l'équation

$$ax^2+bx+c=0.$$

310. x' et x'' étant les racines de l'équation

$$ax^2+bx+c=0,$$

former l'équation du second degré admettant pour racines

$$1-\frac{2}{x'} \quad \text{et} \quad 1-\frac{2}{x''}.$$

311. Déterminer les coefficients de l'équation

$$x^2+px+q=0,$$

sachant que le rapport de ses racines est égal à p et leur différence à $3q$.

312. Sachant que x' et x'' sont racines de l'équation

$$x^2+px+q=0$$

former une équation du second degré dont les racines soient

$$x'+2x'' \quad \text{et} \quad x''+2x'.$$

313. Dans l'équation

$$x^2+4\,(p-2)\,x+3p^2+5=0$$

déterminer p de façon que l'une des racines soit double de l'autre.

314. Déterminer la valeur du paramètre k dans l'équation

$$x^2+(3k+2)x+k^2-2k-5=0$$

de façon que l'une des racines soit triple de l'autre. Valeurs des racines.

315. Trouver une équation dont les racines soient les carrés des racines de l'équation

$$7x^2 + 4x + 2 = 0.$$

316. Déterminer le coefficient m de façon que la différence des carrés des racines de l'équation

$$x^2 - mx + 12 = 0$$

soit égale à 7.

317. Étant donnée l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0$$

dont les racines sont x' et x'', on demande de calculer P et Q en fonction de p et q de façon à former une équation

$$X^2 + PX + Q = 0$$

dont les racines X′ et X″ soient liées à x' et x'' par les relations

$$X' = \frac{x'}{x' - 1}, \qquad X'' = \frac{x''}{x'' - 1}.$$

Que doivent être p et q pour que l'équation en X soit identique l'équation en x?

318. Résoudre l'équation

$$2(a^2 + b^2)x^2 - 3x + (a + b) = 0$$

a et b étant les racines de l'équation

$$y^2 + py + \frac{p^2 - 1}{2} = 0$$

condition pour qu'il y ait des racines en x.

319. On désigne par s et par p la somme et le produit des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

par s' et p' la somme et le produit des racines de l'équation

$$a'x^2 + b'x + c' = 0$$

et enfin par S et P la somme et le produit des racines de l'équation

$$(a + ka')x^2 + (b + kb')x + c + kc' = 0$$

où k est un facteur inconnu. Déterminer k par la condition que

$$P = p + p'$$

et exprimer S en fonction de s, s', p et p'.

320. Étant donnée l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

on demande de déterminer p et q de façon que les racines de l'équation soient égales à p et à q.

321. On porte sur une droite des longueurs OA, OA′ représentant les racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

et les longueurs OB, OB′ représentant les racines de l'équation

$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Quelle relation doit exister entre les coefficients de ces équations pour que l'on ait :

$$\overline{AI}^2 = IB \times IB',$$

étant le milieu de AA′?

322. Soit AD la perpendiculaire abaissée de A sur la base BC du triangle ABC. On connaît le côté $AB = 5$, le côté $AC = 4$; on sait de plus que le produit des deux segments BD et DC de la base est égal à $\frac{135}{16}$. Calculer la longueur de la base.

TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

323. Décomposer en facteurs du premier degré les trinômes suivants :

$$x^2 - 13x + 30;$$
$$2x^2 + 10x - 72;$$
$$24x^2 - 10x + 1;$$
$$4abx^2 - 2a(a + b^2)x + a^2b;$$
$$x^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)x + 1.$$

324. Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + 4x - 21}; \qquad \frac{x^2 - 6x - 27}{x^2 + 9x + 18};$$
$$\frac{2x^2 + 7x - 15}{8x^2 - 14x + 3}; \qquad \frac{x^3 + 2ax^2 + a^2x}{ax^2 - a^3};$$
$$\frac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 4x - 5)}{(x^2 - 1)(x^2 - x - 20)}.$$

325. Simplifier les expressions suivantes :

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3x}; \qquad \frac{x^2 - ax - 6a^2}{x^2 - 7ax + 12a^2};$$
$$\frac{(12x^2 - x - 6)(x^2 - 18x + 77)}{(x^2 - 10x - 11)(3x^2 + 5x + 2)}; \qquad \frac{x^2 - 2bx - 4a(a - 2b) - 3b^2}{x^2 - 4ax - b^2 + 4a^2};$$
$$\frac{x^2 - (a^2 + b)x - 2(a^4 + b^2) + 5a^2b}{x^2 - 3a^2x + 2a^4 + b(a^2 - b)}.$$

326. Quelles valeurs faut-il donner à x pour que le trinôme

$$x^2 - 3x + 2$$

reste compris entre 0 et 6?

327 Quelles conditions doit remplir le nombre n pour que, quelle que soit la valeur attribuée à x, le trinôme

$$x^2 + 2x + n$$

soit supérieur à 10?

328. a, b, c étant des nombres donnés tels que l'on ait

$$a^2 > b^2 > c^2,$$

on considère l'équation

$$(b+c)(x-b)(x-c) + (c+a)(x-c)(x-a) \\ + (a+b)(x-a)(x-b) = 0.$$

Montrer que cette équation a une racine comprise entre a et b.

329. Quelles valeurs faut-il donner à m pour que le trinôme

$$(m+1)x^2 + mx + m$$

reste négatif quel que soit x?

330. Etant donnée l'équation

$$x^2 - 2mx - (1 - m^2) = 0,$$

déterminer les limites entre lesquelles doit être comprise une valeur numérique attribuée à m dans cette équation pour que les racines soient elles-mêmes comprises toutes deux entre -2 et $+4$

331. Quelles valeurs faut-il attribuer à m pour que le trinôme

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3$$

soit négatif pour toutes les valeurs de x?

332. Discuter les racines de l'équation

$$(a^2 - a - 2)x^2 + 2(a-1)x + 2 = 0$$

dans laquelle a est un nombre donné quelconque. Dire ensuite comment il faut prendre a pour que cette équation ait une racine et une seule comprise entre -1 et $+1$

333. Discuter l'équation du second degré

$$R^2x^2 + [d^2 - (R^2 + r^2)]x + r^2 = 0.$$

334. Discuter l'inégalité du second degré

$$R^2x^2 + [d^2 - (R^2 + r^2)]x + r^2 > 0.$$

Si l'on suppose que d est la distance des centres de deux cercles de rayons R et r, énoncer les résultats en langage géométrique.

335. Pour quelles valeurs de x le trinôme

$$x^2 - 8x + 20$$

est-il compris entre 5 et 8?

336. Quelles valeurs faut-il donner à m pour que le trinôme

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6$$

reste positif quel que soit x?

337. Trouver les limites entre lesquelles h doit être compris pour que l'inégalité

$$x^2 + 2hx + h > \frac{3}{16}$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs réelles de x, positives ou négatives.

338. Résoudre l'inégalité

$$(a-2)x^2 - 6x + 5 < 0.$$

339. Existe-t-il des valeurs de m telles que le trinôme

$$(m^2 - 5m - 3)x^2 - 2(m-2)x + 4$$

soit négatif quel que soit x?

340. Discuter les racines de l'équation

$$mx^2 - (2m+1)x + 3m - 1 = 0$$

quand m prend toutes les valeurs possibles. Signes des racines.

341. Résoudre et discuter

$$(m-2)x^2 + (m-3)x + m - 4 = 0.$$

342. Résoudre et discuter

$$(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m = 0.$$

343. Discuter les racines de l'équation

$$(m-5)x^2 - 4mx + (m-2) = 0.$$

344. Étant donné le polynôme

$$ax^2 + bx + c,$$

déterminer la quantité λ par la condition que le polynôme

$$ax^2 + bx + c + \lambda(x^2 + 1)$$

soit un carré parfait. Démontrer que l'équation en λ a ses racines réelles.

345. Démontrer que l'équation

$$(x-a)(x-b) - c^2 = 0$$

a toujours ses racines réelles. Peut-elle avoir ses racines égales et de signes contraires?

346. Démontrer que l'équation du second degré en x

$$\frac{a^2}{x-p} + \frac{b^2}{x-q} - 1 = 0$$

a toujours ses racines réelles quelles que soient les constantes a, b, p, q

347. Démontrer que si l'équation

$$x^2 + px + q = 0$$

a ses racines réelles, l'équation

$$x^2 + px + q + (x+a)(2x+p) = 0$$

a aussi ses racines réelles, quel que soit a.

348. Trouver la condition pour que

$$(a+bx)^2+(a'+b'x)^2$$

soit le carré d'une expression du premier degré en x.

Montrer que si

$$(a+bx)^2+(a'+b'x)^2 \quad \text{et} \quad (a+cx)^2+(a'+c'x)^2.$$

sont ainsi des carrés parfaits, il en sera de même de

$$(b+cx)^2+(b'+c'x)^2.$$

349. On donne l'équation $x^2+px+q=0$.

Déterminer p et q de façon que si x' et x'' sont les racines de cette équation, on ait

$$x'^2+x''^2=a^2; \qquad \frac{x'}{x''}+\frac{x''}{x'}=k.$$

350. Former, résoudre, puis discuter suivant les valeurs de m l'équation qui donne les valeurs de x qui satisfont aux trois équations aux trois inconnues x, y, z.

$$y+2z=(m+1)x-4m,$$
$$y+z=mx-2m-1,$$
$$y^2-2z^2+2xy-xz-x-2y+8m^2-8m-2=0.$$

(*École des Beaux-Arts.*)

351. Comment faut-il prendre k pour que l'une des racines de l'équation

$$3x^2+(k-1)x+3k+2=0$$

soit supérieure à 3, et l'autre inférieure à 2?

352. Comment faut-il prendre m pour que les racines de

$$(m+1)x^2-3mx+4m=0$$

soient réelles et supérieures à -1?

353. Déterminer m de façon que les racines de l'équation

$$(m^2+3m+3)x(x+1)+m^2=0$$

comprennent $-\frac{1}{2}$.

354. En désignant par m un nombre quelconque positif ou négatif, chercher, suivant la grandeur de m, le nombre des racines de l'équation

$$3(m+1)x^2-3(3m+2)x+2(3m+2)=0$$

qui sont comprises entre -1 et $+1$.

355. Que faut-il pour que les racines de l'équation

$$ax^2+bx+c-2a=0$$

soient toutes deux plus grandes que 2?

356. Résoudre

$$\frac{ax}{x-a}+x=b.$$

Discuter. Que faut-il pour que les deux racines soient supérieures à $10a$?

357. Résoudre et discuter l'équation :

$$(m-1)x^2-2(m-2)x+3(m+3)=0;$$

signe des racines selon la valeur de m.

358. a et b étant donnés, entre quelles limites m doit-il être compris pour que l'équation

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+m}$$

ait ses racines réelles?

359. Condition de réalité des racines de l'équation

$$(3k+1)x^2-(4k+1)x+12k=0.$$

Limites de k pour que les racines soient supérieures à 2.

360. Résoudre et discuter l'équation

$$x^2+4mx+2m^2+3m-1=0.$$

361. Discuter les racines de l'équation

$$(m-2)x^2-6mx+2m-10=0.$$

362. Résoudre l'équation

$$a(1-\sin^2 x)+(2a^2-a+1)\sin x-3a+1=0.$$

363. Résoudre l'équation

$$m\sin^2 x-(m-2)\sin x+3=0$$

364. Résoudre et discuter l'équation

$$\frac{\sin^2 x}{2-\sin^2 x}=m.$$

365. Résoudre et discuter

$$\frac{2\sin^2 x}{3-\sin^2 x}=m.$$

366. Résoudre et discuter :

$$m^2\sin^2 x-2\sin x-3=0.$$

367. Résoudre et discuter :

$$m^2\sin^2 x-3\sin x+2=0$$

368. Résoudre et discuter :

$$1-2k=(\cos x-mk)\cos x.$$

369. Résoudre et discuter l'équation :

$$\sin^2 x+2(2m-1)\sin x+3m^2+5=0.$$

370. Résoudre l'équation :

$$(3k-1)\sin^2 x+2\sin x+4k-1=0.$$

371. On donne l'équation du second degré :

$$y^2+(1-e^2)x^2=a^2(1-e^2)$$

dans laquelle a et e sont des constantes, e étant inférieur à 1, et les deux relations :

$$x = ae + r\cos V,$$
$$y = r\sin V,$$

dans lesquelles r et V sont deux nouvelles variables. On demande d'exprimer r le plus simplement possible en fonction de V.

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ A UNE INCONNUE

372. Un nombre est formé par le produit de 3 nombres entiers consécutifs, et la somme des quotients que l'on obtient en divisant ce nombre par chacun de ses facteurs est 47. Trouver ce nombre.

373. Étant donnée une ligne de longueur a, on en prend le milieu et on la prolonge. Trouver la longueur de la partie prolongée de telle manière que le rectangle ayant pour dimensions la moitié de la ligne donnée et l'autre moitié augmentée de la partie prolongée, soit équivalent au carré construit sur la partie prolongée.

374. Trouver un nombre tel que son carré augmenté de son cube donne une somme égale à 9 fois le nombre suivant.

375. Trouver deux nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés soit égale à 15 313.

376. Une personne ayant acheté un objet le revend 21 francs; elle perd autant pour cent sur l'objet qu'il lui a coûté de francs. Quelle somme perd-elle ?

377. Une personne veut partager 380 francs entre un certain nombre de pauvres; au moment du partage, surviennent 6 autres pauvres et il en résulte que la part de chacun est diminuée de 4fr,80. Combien y avait-il de pauvres au commencement? Interpréter la solution négative.

378. Dans une salle de concert, 800 personnes sont assises sur des bancs d'égale longueur. S'il y avait eu 20 bancs de moins, il aurait été nécessaire de faire asseoir 2 personnes de plus sur chaque banc. Trouver le nombre de bancs.

379. Trois nombres sont entre eux comme 6, 4 et 10 et la somme de leurs carrés est égale à 342. Trouver ces nombres.

380. Trouver 3 nombres entiers consécutifs tels que leur produit égale 5 fois leur somme.

381. Partager le nombre 8 en deux parties telles que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre le nombre entier et la plus petite.

382. Quelle est la base du système de numération dans lequel le nombre 417 du système décimal s'écrit 513 ?

383. Les deux nombres 1141 et 634 appartenant à un système de numération dont la base est inconnue ont pour différence 102 dans le système décimal. Quelle est la base du premier système ?

384. Une personne avait prêté 20 000 francs à un certain taux pour 5 ans; elle reçoit le capital augmenté de ses intérêts simples et replace le tout à 1 % de moins qu'auparavant et en retire un revenu de 1000 francs. Quel était le taux primitif ?

385. Un terrain rectangulaire a une largeur égale aux $\frac{5}{8}$ de sa longueur. Le propriétaire en garde pour lui-même une portion rectangulaire dont la longueur a 30 mètres de moins que la longueur primitive et dont la largeur n'est que les $\frac{13}{15}$ de ce qu'elle était d'abord. Il vend le reste à raison de 6840 francs l'hectare et emploie le montant de cette vente à l'achat de 174 francs de rente 3 $^0/_0$ au cours de $102^{fr},60$. Quelles étaient la longueur et la largeur du terrain primitif?

(On ne tiendra compte ni des frais, ni du timbre.)

(*Certificat d'ét. supérieur, Seine*).

386. Un trapèze rectangle a pour bases B et b et pour hauteur h. Calculer le rayon du cercle équivalent.

Application : $B = 12^m,10$; $b = 9^m$; $h = 2^m,5$.

387. Quel doit être le rayon d'un cercle pour que la surface du carré inscrit soit de $86^{m^2},509$?

388. Trouver cinq nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des trois autres.

389. Trouver sur une droite AB de longueur a un point M tel que le produit des segments AM et BM soit égal à la moitié du carré de a.

390. On considère un triangle rectangle isocèle; sur l'un des côtés de l'angle droit on construit, extérieurement au triangle donné, un triangle équilatéral et sur l'autre côté de l'angle droit un carré; on joint les deux sommets voisins de ces deux figures et l'on demande de déterminer les côtés du triangle primitif de façon que la surface totale de la figure obtenue soit égale à a^2.

391. On donne un angle droit $x0y$; on porte sur $0y$ une longueur $OB = h$, puis à la suite une longueur $BC = m$. Déterminer sur $0x$ la longueur OA de telle sorte que les deux angles CAB et BAO soient égaux.

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ A PLUSIEURS INCONNUES

392. La somme de deux nombres est 6 fois plus petite que la différence de leurs carrés, et la somme des carrés est 306. Quels sont ces nombres?

393. Trouver deux nombres tels que leur différence, leur somme et leur produit soient entre eux comme 2, 3, 5.

394. Le rapport de deux nombres est 6 et la somme de leurs carrés est 592. Quels sont ces nombres?

395. La somme de deux nombres est 28, et la somme de leurs carrés surpasse de 36 le double du produit de ces nombres. Trouver ceux-ci.

396. Si au produit de deux nombres on ajoute le plus grand, on obtient 855; mais si au même produit on ajoute le plus petit, on ne trouve que 828. Quels sont ces nombres?

397. La somme des carrés de deux nombres est 410. Si l'on diminue le plus grand de 4 et qu'on ajoute 4 au plus petit, la somme des carrés des deux résultats est de 394. Quels sont ces nombres?

398. Trouver deux nombres tels que leur produit soit égal à 531 et que l'excès du premier sur le double du second soit 41.

399. Trouver un nombre de deux chiffres tel que, divisé par le produit de ces deux chiffres, il donne $\frac{16}{3}$ pour quotient et que si l'on en retranche 9 on obtienne le nombre renversé.

400. Deux mobiles M et N partent de deux points A et B et vont à la rencontre l'un de l'autre, d'un mouvement uniforme. M se met en mouvement 5 secondes après N et parcourt 4 mètres de plus que lui par seconde. Ils se rencontrent au milieu de AB dont la longueur est de 1200 mètres. Quelle est la vitesse de chaque mobile?

401. Un nombre est composé de trois chiffres. Le carré du chiffre des dizaines est égal au produit des chiffres extrêmes augmenté de 4. La différence entre le double du chiffre des dizaines et celui des unités est égale au chiffre des centaines, et quand on écrit les chiffres de ce nombre dans un ordre inverse, on obtient un second nombre qui, retranché du premier, donne pour reste 390 augmenté du chiffre des dizaines commun à ces deux nombres. Trouver ce nombre.

402. L'escompte d'un billet de 2 460 francs est $67^{fr},65$. Si l'échéance était rapprochée de 55 jours et le taux augmenté de 1,5 $^0/_0$, l'escompte resterait le même. Trouver le taux et l'échéance.

403. On a acheté du blé pour 540 francs; si chaque sac avait coûté 3 francs de moins on aurait pu en acheter 2 sacs de plus. Combien a-t-on acheté de sacs et quel est leur prix d'achat?

404. Un marchand a deux pièces de vin; la contenance de la première est à celle de la deuxième comme 5 est à 4. Le litre de la première coûte autant de demi-centimes qu'il y a de litres dans la pièce; le litre de la deuxième coûte $0^{fr},25$ de moins que le litre de la première. La valeur totale des deux pièces est de $430^{fr},10$. Combien contient chaque pièce?

(*Examen d'élève mécanicien de la marine*).

405. Deux ouvriers ont travaillé chez un même entrepreneur; le premier a reçu 125 francs pour un certain nombre de journées de travail et le second, qui a travaillé 5 jours de moins que le premier, ne reçoit que 60 francs. Si le second avait travaillé tous les jours et que le premier eût manqué 10 jours, ils auraient reçu la même somme. On demande combien de jours chacun d'eux a travaillé et le prix de la journée de chacun.

406. En parcourant une distance de 2 730 mètres, les roues de devant d'une voiture ont fait 392 tours de plus que les roues de derrière. Si l'on augmentait le rayon de chaque roue de façon que leur circonférence augmentât de $0^m,3$, les roues de devant ne feraient plus, sur la même distance, que 325 tours de plus que les roues de derrière. Quelle est la circonférence de chaque roue?

407. Deux ouvriers doivent creuser un fossé; le premier en fait la moitié et ensuite le second fait le reste; ils emploient alors 25 heures. Si

les deux ouvriers travaillaient ensemble, ils auraient fini en 12 heures. Combien de temps chaque ouvrier mettrait-il pour faire seul l'ouvrage entier?

408. Deux ouvriers A et B ont reçu pour de l'ouvrage fait, le premier 30 francs et le second 14 francs, ce dernier ayant travaillé trois jours de moins que le premier. Si A avait travaillé 2 jours de moins et B 5 jours de plus, ils auraient reçu la même somme. On demande le nombre de jours de travail et le prix de la journée de chacun.

409. Deux ouvriers reçoivent l'un une somme de 80 francs, l'autre une somme de 45 francs; le premier a travaillé 5 jours de plus que l'autre. Si le nombre de jours de travail était interverti, les deux ouvriers recevraient autant l'un que l'autre. Combien chacun a-t-il travaillé de jours?

410. Un batelier descend une rivière de 240 kilomètres; il la remonte ensuite en mettant 2 jours de plus parce que, chaque jour, il fait 6 kilomètres de moins qu'en la descendant. Combien a-t-il mis de jours pour descendre?

411. Deux fermiers ont vendu ensemble pour 1350 francs de blé. Le premier a vendu 5 hectolitres de plus que l'autre; si chacun d'eux avait vendu ce qu'a vendu l'autre, le premier aurait reçu 540 francs et le second 840 francs. Combien d'hectolitres chaque fermier a-t-il vendu, et à quel prix?

412. Un commerçant avait acheté pour 1800 francs de drap, et il constate à la livraison de sa marchandise qu'on lui a expédié par erreur du drap valant $2^{fr},50$ de moins par mètre, mais que la pièce fournie renferme 15 mètres de plus qu'il n'en avait acheté. Il consent à garder ce drap pour le prix convenu; on demande la longueur de cette pièce de drap et le prix du mètre.

413. On peut payer exactement une somme de 70616 francs soit au moyen de pièces d'or anglaises appelées *souverains*, soit au moyen de pièces d'or portugaises appelées *couronnes*. On sait que le nombre des souverains dépasse de 1539 unités celui des couronnes, et que la valeur de 100 couronnes dépasse celle de 200 souverains de 556 francs Calculer les valeurs, en francs et fractions décimales du franc, de ces deux espèces de monnaie.

414. Trouver un nombre de trois chiffres sachant que le chiffre des dizaines est moyen proportionnel entre les deux autres; que l'inverse du chiffre des centaines est égal à l'inverse du chiffre des dizaines plus deux fois l'inverse du chiffre des unités; que le chiffre des unités est égal au produit des deux autres.

415. On remet à un banquier deux billets : l'un de 550 francs payable dans 7 mois, l'autre de 720 francs payable dans 4 mois. Le banquier escompte ces billets d'après la méthode rationnelle et donne pour le tout 1200 francs. On demande quel est le taux annuel de l'intérêt d'après lequel les billets ont été escomptés.

416. On donne deux rectangles de même périmètre; les côtés de l'un sont 8 et 4, la surface du second est la moitié de la surface du premier. Calculer ses côtés.

417. Trouver deux nombres dont la somme soit égale à 9 fois la différence et dont le produit diminué du plus grand nombre soit 12 fois le quotient du plus grand nombre par le plus petit.

418. Les 3 côtés d'un triangle sont exprimés par 3 nombres entiers consécutifs; la surface de ce triangle est les $\frac{2}{5}$ du produit des plus grands côtés. Calculer les 3 côtés et la surface de ce triangle.

419. Trouver deux nombres multiples consécutifs de 5, dont le produit soit 6 fois plus grand que la somme.

420. Étant donné un demi-cercle O de diamètre $AB = 2R$, calculer la corde AM de façon qu'en abaissant la perpendiculaire MP sur AB on ait

$$AM = PB.$$

Calculer dans ce cas le rapport $\frac{\overline{MP}^2}{\overline{OP}}$.

421. La surface d'un trapèze est équivalente à celle d'un rectangle construit sur les deux bases; le triple de la petite base augmenté de la grande donne une longueur égale à 4 fois la hauteur du trapèze qui est de 18 mètres. Calculer les bases de ce trapèze.

422. Le périmètre d'un triangle rectangle est de 208 mètres; la somme des côtés de l'angle droit surpasse de 30 mètres la longueur de l'hypoténuse. Quels sont les trois côtés?

423. La surface d'un triangle rectangle est de 6 décimètres carrés; si l'on construit avec les trois côtés de ce triangle comme arêtes un parallélépipède rectangle, le volume de ce solide serait de 60 décimètres cubes. Quels sont les côtés du triangle?

DISCUSSIONS

424. Étant donné un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$ et de centre O, mener par le point A une corde AC telle qu'en abaissant de O sur AC la perpendiculaire OD on ait

$$\overline{AC}^2 + \overline{OD}^2 = m^2.$$

425. Étant donné un demi-cercle de rayon R, calculer la longueur d'une corde MN parallèle au diamètre AB et telle que

$$\overline{AM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NB}^2 = 4a^2.$$

Discuter le problème. Prendre pour inconnue la moitié de MN.

426. Étant donné un demi-cercle de rayon R, trouver sur le diamètre AB un point C tel qu'en décrivant sur AC et BC comme diamètres des demi-cercles à l'intérieur du demi-cercle donné, la surface comprise entre les trois courbes soit équivalente à celle d'un cercle de rayon a.

427. Étant donné un quart de cercle et les rayons rectangulaires OA et OB, trouver sur l'arc un point M tel qu'en abaissant la perpendiculaire MP sur OB, et joignant AM, on ait :

$$MP = AM.$$

428. Étant donné un cercle O, trouver un point M tel qu'en menant les tangentes MA et MB au cercle, la surface du triangle MAB soit dans un rapport donné k avec celle du triangle OAB.

429. On donne un triangle OAB, rectangle en O et tel que $OB = 2OA$. On demande de trouver sur l'hypoténuse AB, entre A et B, un point M tel qu'en abaissant les perpendiculaires MP sur OA et MQ sur OB, puis construisant extérieurement au triangle les carrés OPHK et OQTS, l'aire limitée au contour MPHKOSTQ soit égale à une valeur donnée m^2.

430. Étant donné un triangle rectangle ABC, chercher sur le côté AB de l'angle droit A un point M tel que l'on ait :

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 = k^2.$$

431. On donne la base $BC = 2a$ et la hauteur h d'un triangle isocèle ABC. Trouver sur le côté AB un point M tel qu'en menant MN parallèle à BC et MP perpendiculaire à BC, la surface du trapèze rectangle MNCP soit une fraction donnée m de la surface ABC.

432. On donne un triangle ABC rectangle en A et dont l'angle C est de 30°. Calculer BM de façon que si on abaisse MP perpendiculaire sur l'hypoténuse, les triangles BMP et AMC soient équivalents. Calculer le rapport $\frac{BM}{AM}$ dans cette hypothèse.

433. Étant donné un demi-cercle de centre O, de diamètre AB, on mène les tangentes en A et B. On demande de mener une troisième tangente CD telle que le trapèze ABCD ait une surface donnée.

434. Dans un triangle ABC on donne $BC = 2a$

$$2AB + AC = 5a$$

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2a^2$$

calculer AB et AC.

435. Étant donné un cercle de rayon R tangent à deux droites rectangulaires OX, OY, trouver sur le cercle un point M tel qu'en abaissant les perpendiculaires MP sur OX et MQ sur OY, le périmètre du rectangle OPMQ soit égal à 6R.

436. On donne un triangle; déterminer un point sur la base, tel que, si l'on mène par ce point des parallèles aux deux autres côtés, le parallélogramme ainsi formé ait une aire équivalente à la moitié de celle du triangle.

437. Dans un triangle rectangle, on connaît les côtés de l'angle droit b et c. Déterminer sur l'hypoténuse un point tel que la somme des carrés de ses distances aux deux côtés donnés soit égale à m^2. — Discussion.

438. Soit un carré ABCD; on diminue le côté AB de 2 mètres et le côté AD de 1 mètre et sur les longueurs obtenues comme restes on construit un rectangle R. On augmente le côté AB de 4 mètres et on diminue AD de 5 mètres et sur les longueurs obtenues on construit un second rectangle R′. Déterminer le côté du carré de manière que le rapport de la surface R à la surface R′ soit égal à un nombre donné m.

439. Étant donnés sur une droite 4 points équidistants A, B, C, D, trouver sur cette droite un point M tel que l'on ait

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 + \overline{MD}^2 = k^2.$$

440. On donne un rectangle et on demande de diminuer ses côtés d'une même longueur de façon que le rectangle formé avec les nouvelles dimensions soit une fraction donnée m du premier.

441. Étant donné un demi-cercle décrit sur AB comme diamètre, on considère un cercle C, intérieur au demi-cercle donné, tangent à ce demi-cercle et tangent au diamètre AB; soit M le point de contact avec AB; on demande de déterminer le point M de telle sorte que, si on ajoute à la longueur AM le diamètre du cercle C, on obtienne une somme égale à la longueur donnée a; on désignera par R le rayon du cercle donné.

(*Certificat d'aptitude au professorat des écoles normales*)

442. Soit un rectangle ABCD. Sur DC comme diamètre, on décrit le demi-cercle DEC à l'extérieur du rectangle. On considère la figure limitée par le demi-cercle et les trois côtés DA, AB, BC du rectangle. Déterminer $AB = x$, $BC = y$ de façon que le périmètre de la figure considérée soit égal à p et sa surface égale à k^2. Conditions de possibilité. Distinction des cas où il y a une ou deux solutions. Quelle relation faut-il établir entre p et k pour que le rectangle se réduise à un carré?

443. On donne un angle droit XOY et un point P sur la bissectrice de cet angle. Mener par le point P une droite rencontrant OX en A et OY en B telle que la surface du triangle OAB soit équivalente à celle d'un carré de côté a. On cherchera la longueur $OA = x$. On donne $OP = d$.

444. On connaît dans un triangle rectangle, l'hypoténuse a et la somme b des deux côtés de l'angle droit; calculer ces côtés. — Discussion.

445. Étant donnée une droite AB de longueur a, trouver un point M sur cette droite tel que l'on ait

$$\overline{AM}^2 + 3\overline{BM}^2 = k^2$$

k^2 étant une quantité donnée. — Discussion.

446. On donne deux droites parallèles X et Y dont la distance est d, et deux points A et B sur X; $AB = 2a$. Trouver sur Y un point M tel que l'on ait

$$MA = 2MB.$$

On prendra comme inconnue la distance OC du milieu O de AB au pied C de la perpendiculaire abaissée de M sur X.

447. On donne la base $2a$ et la hauteur $2b$ d'un rectangle ABCD. On demande de tracer un cercle tangent aux deux bases de ce rectangle de façon que la surface de ce cercle soit moyenne proportionnelle entre les deux portions de la surface du rectangle situées de part et d'autre du cercle.

448. Étant donné un rectangle ABCD, on porte à partir de chacun des sommets, sur chaque côté et dans le même sens des longueurs égales

$$AM = BN = CP = DQ.$$

On obtient ainsi un parallélogramme MNPQ intérieur au rectangle. Déterminer AM de façon que la surface de ce parallélogramme soit les $\frac{3}{4}$ de celle du rectangle.

449. On donne un cercle O de rayon R et un point A sur ce cercle. Mener par ce point A deux cordes égales AC et AD telles que l'on ait

$$\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 4\,m^2.$$

Discuter.

450. Étant donné un demi-cercle AOB, on propose de trouver sur le diamètre AB un point P tel que si par le point P on élève la perpendiculaire sur le diamètre AB, qui rencontre le cercle en N et qu'ensuite par le point N on mène la parallèle à AB coupant le cercle en M on ait

$$2\,\overline{AM}^2 + \overline{PM}^2 = k^2,$$

k^2 étant une quantité donnée.

451. Etant donné un demi-cercle de diamètre AB, on demande, de trouver sur cette courbe un point M tel qu'en joignant MB et abaissant de M la perpendiculaire MC sur la tangente en A, on ait :

$$\overline{MB}^2 + k\,\overline{MC}^2 = 2\,\overline{AB}^2,$$

k étant un nombre quelconque.

452. Étant donné un demi-cercle de diamètre AB et de rayon R, déterminer sur ce diamètre un point C tel qu'en élevant la perpendiculaire CD à AB, rencontrant le cercle en D, la médiane DM du triangle rectangle ACD ait une longueur donnée.

453. On donne un cercle et une tangente. On demande de mener une corde CD parallèle à la tangente telle que, si on abaisse les perpendiculaires CA et DB sur la tangente, le rectangle ABDC ait sa diagonale de longueur donnée.

454. On donne un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$. Trouver un poin M sur la courbe tel que si on joint AM et si on abaisse MP perpendiculaire sur la tangente en B, on ait

$$AM + MP = a.$$

Discuter le problème. — On prendra comme inconnue la longueur $AM = x$.

455. Étant donné un cercle de rayon R, calculer la hauteur AD d'un triangle isocèle de base BC inscrit dans ce cercle sachant que

$$AB \cdot AC + \overline{BC}^2 = a^2.$$

ÉQUATIONS IRRATIONNELLES.

456. Résoudre les équations :

$$x - \sqrt{144 + x^2} = 10; \qquad x + \sqrt{100 + x^2} = 25.$$

457. Résoudre les équations :

$$x - \sqrt{144 - x^2} = 10; \qquad x + \sqrt{100 - x^2} = 25;$$

$$x + \sqrt{2x - 3} = 4; \qquad x - \sqrt{3x - 7} = 12.$$

458. Résoudre les équations :

$$3x - 17 = \sqrt{7x^2 - 50x + 79}; \qquad 7x - 1 = \sqrt{x^2 + 7x + 10}.$$

459. Résoudre les équations :

$$\sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5} = 7; \qquad \sqrt{21+x} = \sqrt{28+2x} - 1;$$

$$\sqrt{3x-5} = 1 + \sqrt{2x-5}.$$

460. Résoudre et discuter l'équation :

$$\sqrt{3+x} + \sqrt{5+x} = m.$$

461. Résoudre et discuter l'équation :

$$\sqrt{3x-a} + 2x - a = 0.$$

462. Résoudre et discuter l'équation :

$$2x - 3a = -\sqrt{x - a^2}.$$

463. Résoudre et discuter l'équation :

$$4x - \sqrt{4x^2 - a^2} = 4a.$$

464. Calculer les 3 côtés d'un triangle, sachant que ces côtés sont trois nombres entiers consécutifs et que la surface du triangle est égale au triple produit du côté moyen par la différence des côtés extrêmes.

465. Étant donné un carré ABCD de côté a, trouver sur la diagonale AC un point M tel qu'en abaissant la perpendiculaire MP sur AB et menant MD, on ait :

$$MP + MD = \frac{3a}{2}.$$

466. Étant donné un rectangle ABCD, trouver entre A et B un point E tel qu'en menant EF parallèle au côté AD, on ait :

$$\frac{AF}{EB} = \frac{1}{3}.$$

467. On donne un cercle O de rayon R, et un diamètre AB. Déterminer la distance $BI = x$ de façon qu'en élevant la perpendiculaire IE à AB et menant en E la tangente au cercle jusqu'à sa rencontre en F avec le diamètre AB, on ait :

$$EF = EI + IB.$$

468. Étant donnés un cercle et une droite, mener une corde parallèle à la droite de telle sorte qu'en abaissant des extrémités de la corde des perpendiculaires sur la droite, on forme un carré.

469. Étant donné un demi cercle de rayon R, de diamètre AOB, trouver sur AB un point C tel qu'en élevant en P la perpendiculaire à AB jusqu'en D sur le cercle, puis menant AD, on ait la relation :

$$AD + BC = l,$$

l étant une longueur donnée. Discussion.

470. On donne un demi-cercle de diamètre AB, de rayon R. Déterminer sur AB un point C tel qu'en élevant la perpendiculaire CD à AB jusqu'à sa rencontre avec le cercle on ait :

$$AC + AD = l,$$

l étant une longueur donnée. — Discuter.

471. On donne un demi-cercle AOB de rayon R et la tangente en B à l'extrémité B du diamètre AB. Trouver sur le demi-cercle un point M tel qu'en abaissant la perpendiculaire MC sur la tangente BC, on ait :

$$AM + 2\,MC = l,$$

l étant une longueur donnée. — Discuter. — Prendre comme inconnue la distance de M à la tangente en B.

472. Étant donnés un demi-cercle O et son diamètre AB, on propose de trouver sur la courbe un point M tel que, en abaissant la perpendiculaire MP sur AB la somme $MP + AP$ soit égale à une longueur donnée.

473. Étant donné un cercle de centre O et de rayon R et un point A dans son plan, tel que $OA = 2R$, déterminer sur OA un point M tel qu'en élevant la perpendiculaire MB à OA, rencontrant le cercle en B, on ait :

$$AM + 2\,MB = l.$$

474. Dans un cercle de rayon R, calculer la longueur d'une corde telle que la somme de la longueur de cette corde et de sa distance au centre soit égale à a. Calculer la corde et sa distance au centre lorsque a est le plus grand possible.

475. Calculer l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont on donne l'un des côtés a de l'angle droit et dans lequel la différence entre le double de l'hypoténuse et l'autre côté de l'angle droit est égale à une longueur donnée d. Donner la valeur correspondante du troisième côté.

476. Deux triangles rectangles ABC, DBC ayant le côté $BC = a$ commun, déterminer les autres côtés AB, CD des angles droits, sachant que la somme des carrés de ces côtés AB, CD égale le carré de la ligne AD qui joint les sommets A et D, et que la somme des hypoténuses égale une quantité donnée b. Indiquer les relations qui doivent exister entre a et b pour que le problème soit possible.

(*Admission à l'emploi d'élève mécanicien de la marine. Toulon.*)

ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Il suffira de refaire les problèmes 450 à 454 et 469 à 475 en prenant pour inconnue l'angle au centre du cercle sous lequel on voit du point O l'arc x qui a pour origine l'une des extrémités du diamètre et pour extrémité le point inconnu sur ce cercle.

(L'inconnue auxiliaire est généralement : $\sin\frac{x}{2}$. Voir n° **294**.)

CHAPITRE VII

VARIATIONS DE FONCTIONS

§ 1. — Variation du trinôme du second degré.

295. — Remarques préliminaires. — Nous avons déjà remarqué (n° **68**) que de deux nombres *négatifs*, le plus petit est celui qui a la plus grande valeur absolue.

En d'autres termes, lorsqu'un nombre négatif *croît*, sa valeur absolue *décroît*.

Ceci dit, remarquons d'autre part que si a et b sont des nombres *positifs*, arithmétiques, et si $a > b$, on a $a^2 > b^2$.

En d'autres termes, lorsqu'un nombre positif augmente, son carré augmente.

On peut l'établir, avec précision, de la façon suivante :

Pour prouver que $a^2 > b^2$ il faut prouver que $a^2 - b^2$ est positif. Or (n° **52**) on a :

$$a^2 - b^2 = (a - b)\ (a + b).$$

Et ainsi on voit que $a^2 - b^2$ est bien positif puisque c'est le produit de deux nombres positifs, à savoir : $a - b$ par hypothèse, puisque $a > b$, et $a + b$ parce que a et b sont positifs.

296. — Variation de la fonction $y = x^2$. — Soit x une quantité variable susceptible de prendre toutes les valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$, x est ce que nous avons appelé (n° **206**) une *variable indépendante*, et étudions la variation de son *carré* x^2.

Le carré d'un nombre est le même que le carré de sa valeur absolue et comme, d'ailleurs, d'après la remarque faite plus haut, le carré de la valeur absolue varie dans le même sens que cette valeur absolue, on peut dire que :

Le carré d'un nombre algébrique varie dans le même sens que sa valeur absolue.

Faisons alors *croître* x de $-\infty$ (valeur négative excessivement grande en valeur absolue) jusqu'à $+\infty$ (valeur positive excessivement grande).

Lorsque la valeur absolue de x est excessivement grande, son carré x^2 est également excessivement grand ; car le carré d'un nombre positif plus grand que 1 est plus grand que ce nombre.

Par suite, lorsque x *croît* de $-\infty$ à 0, comme x est négatif, sa valeur absolue *décroît* de $+\infty$ à 0, donc son carré x^2 *décroît* de $+\infty$ à 0.

Ensuite,

lorsque x *croît* de 0 à $+\infty$, comme il est positif, son carré x^2 *croît* de 0 à $+\infty$.

En résumé, la fonction $y = x^2$:

est DÉCROISSANTE *dans l'intervalle* $(-\infty, 0)$,

et CROISSANTE *dans l'intervalle* $(0, +\infty)$.

Pour $x=0$, elle prend la plus petite valeur qu'elle puisse prendre ; on dit alors que pour $x=0$ elle est *minima* et que la valeur 0 qu'elle prend pour $x=0$ est un *minimum*.

Tout ceci se résume dans le tableau ci-joint, qu'il faut lire de haut en bas :

x	y
$-\infty$	$+\infty$
croît	positive décroît
0	0 (minimum)
croît	positive croît
$+\infty$	$+\infty$

297. — Représentation graphique de la variation de $y = x^2$. — Pour représenter graphiquement la variation de la fonction

$$y = x^2,$$

choisissons deux axes rectangulaires Ox, Oy (voir n° **224**) et figurons les divers points de coordonnées x et y obtenus

en donnant successivement à x toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et calculant les valeurs correspondantes de y.

Pour $x = -\infty$, $y = +\infty$, on a un point très éloigné, à gauche en haut.

Quand x croît y décroît; la courbe descend.

Figurons-en un certain nombre de points (fig. 31) :

pour	$x = -2$,	on a :	$y = 4$	ce qui donne le point	C′,
—	$x = -1$,	—	$y = 1$	—	B′,
—	$x = -\frac{1}{2}$,	—	$y = \frac{1}{4}$	—	A′.
—	$x = 0$,	—	$y = 0$	—	O.

La courbe vient passer à l'origine.

On a, pour les valeurs négatives de x, une première branche descendante C′ B′ A′ O.

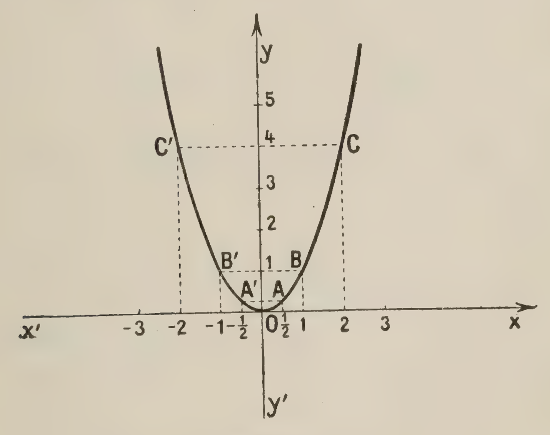


Fig. 31.

Lorsque x devient positif, y croît et la courbe *monte* alors de gauche à droite.

Elle part de l'origine, monte et s'éloigne indéfiniment à droite en haut.

Traçons-en quelques points :

pour	$x = \frac{1}{2}$	on a :	$y = \frac{1}{4}$	ce qui donne le point	A,
—	$x = 1$	—	$y = 1$	—	B,
—	$x = 2$	—	$y = 4$	—	C.

On a ainsi une seconde branche de courbe ascendante OABC.

Les deux branches C'B'A'O *et* OABC *sont symétriques par rapport à* Oy.

En effet, pour deux valeurs opposées de x, y a la même valeur. On obtient donc deux points ayant même ordonnée et situés de part et d'autre de Oy à la même distance. Par suite, les points obtenus pour les valeurs positives de x sont symétriques de ceux qu'on obtient pour les valeurs négatives.

Ainsi les points A et A', B et B', C et C' sont symétriques par rapport à Oy.

298. — Variation de $y = ax^2$. — Considérons, plus généralement la fonction $y = ax^2$ de la variable x où a désigne un nombre fixe positif ou négatif.

La variation de cette fonction se déduit immédiatement de celle de la fonction $y = x^2$ en appliquant le théorème du n° **70**.

Il résulte, en effet, immédiatement de ce théorème que lorsqu'on multiplie une quantité variable par un nombre *positif*, le produit varie *dans le même sens* que cette quantité.

Si, au contraire, on multiplie une quantité variable par un nombre *négatif*, le produit varie *en sens inverse*.

Si, en effet, on a $\quad x'^2 > x''^2$;

1° Si $a > 0$ (en vertu du théorème du n° **70**)

$$ax'^2 > ax''^2 ;$$

2° Si $a < 0$, $\quad ax'^2 < ax''^2$.

Ainsi, lorsque x passe de la valeur x'' à la valeur x', si son carré x^2 *croît*, ax^2 *croît* si a est *positif* et ax^2 *décroît* si a est *négatif*.

299. — Cas de $a > 0$. — Il résulte de ce qui précède que ax^2 varie dans le même sens que x^2 lorsque a est *positif*. Les variations sont représentées par un tableau absolument semblable à celui qui figure au nº **296**.

La courbe représentative a exactement la même forme que celle de la variation de $y = x^2$, c'est-à-dire a la même forme que celle de la figure 31.

Exemple. — *Construisons, par exemple, la courbe représentative de la fonction*

$$y = \frac{1}{4} x^2.$$

Prenons deux axes rectangulaires Ox, Oy et une unité de longueur

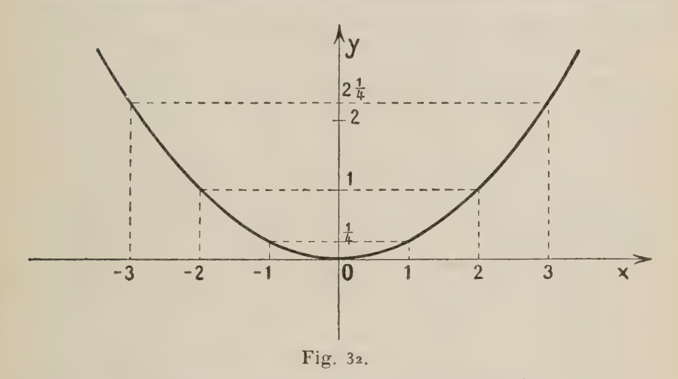


Fig. 32.

arbitraire sur Ox. Nous connaissons sa forme générale, il nous suffit d'en tracer quelques points :

pour	$x = \pm 3$,	on a :	$y = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$;
—	$x = \pm 2$,	—	$y = 1$,
—	$x = \pm 1$,	—	$y = \frac{1}{4}$.

Nous avons ainsi six points qui nous donnent la courbe de la figure 32. Cette courbe est plus ouverte, plus *large* que celle de la figure 31.

300. — Cas de $a < 0$. — Lorsque a est négatif, le produit ax^2 est toujours négatif et varie, comme nous l'avons vu, en sens inverse de x^2.

Inscrivons dans le tableau ci-joint la variation de x^2 et celle de ax^2 qu'on en déduit :

Lorsque x croît de $-\infty$ à o, ax^2 croît aussi de $-\infty$ à o.

Puis, lorsque x croît de o à $+\infty$, ax^2 décroît de o à $-\infty$.

Pour $x=0$, la fonction ax^2 atteint sa *plus grande valeur*, on dit qu'elle est *maxima*, et la valeur qu'elle atteint est un *maximum*.

$(a < 0)$

x	x^2	ax^2
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
croît	décroît positif	négatif croît
o	o	o (maximum)
croît	positif croît	négatif décroît
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

La courbe représentative est tout entière au-dessous de Ox, puisque y est toujours négatif.

Il est facile de la déduire du cas précédent.

Si, en effet, on construit simultanément les deux courbes

$$y = 2x^2 \quad \text{et} \quad y = -2x^2,$$

on constate qu'elles sont *symétriques* l'une de l'autre, par rapport à Ox.

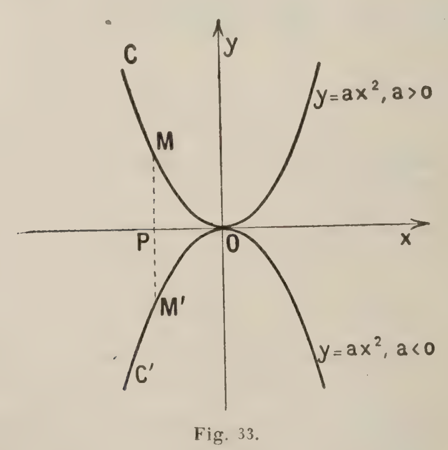


Fig. 33.

En effet, pour une *même* valeur de x, les deux valeurs

de y correspondantes sont *opposées*. Pour une même abscisse $\overline{OP}$ (fig. 33), on obtient deux points M et M′ symétriques par rapport à Ox, puisque que les deux ordonnées

$$\overline{PM} = 2x^2 \quad \text{et} \quad \overline{PM'} = -2x^2$$

sont *opposées*.

Lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, le point M décrit la courbe C (fig. 33) située au-dessus de Ox; le point M′ décrit alors la courbe C′, symétrique de C par rapport à Ox, représentative de la fonction $y = -2x^2$.

D'une façon générale, les deux courbes C et C′, représentatives des deux fonctions obtenues en donnant à a des valeurs *opposées*, sont symétriques par rapport à Ox.

301. — Résumé. — La courbe représentative de la variation de la fonction

$$y = ax^2$$

a toujours la forme de la courbe C (fig. 33).

Cette courbe se compose de deux branches symétriques par rapport à Oy; c'est ce qu'on appelle, en géométrie, une ***parabole*** : Oy est nommé l'*axe* de la parabole; O est le *sommet*.

Lorsque a est *positif*, la parabole C est *au-dessus* de l'axe Ox et tourne son ouverture vers le haut.

Lorsque a est *négatif*, la parabole C′ est *au-dessous* de Ox et tourne son ouverture vers le bas.

302. — Cas général. — Considérons maintenant un trinôme quelconque du second degré.

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Pour étudier sa variation, nous le mettrons sous la forme (I *bis*) du n° **269**, et nous l'écrirons

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

ou $$y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Sous cette forme, l'étude de la variation de y se fait sans difficulté.

D'abord $x+\frac{b}{2a}$ varie évidemment dans le même sens que x.

Le carré variera donc dans ce sens ou en sens contraire, suivant que cette quantité est positive ou négative (n° **296**).

Or, $x+\frac{b}{2a}$ s'annule et change de signe pour $x=-\frac{b}{2a}$.

Donc :

1° $\begin{cases} x, \text{ croissant de } -\infty \text{ à } -\frac{b}{2a}, \\ x+\frac{b}{2a} \text{ croît de } -\infty \text{ à } 0, \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ décroît de } +\infty \text{ à } 0. \end{cases}$

2° $\begin{cases} x, \text{ croissant de } -\frac{b}{2a} \text{ à } +\infty, \\ x+\frac{b}{2a} \text{ croît de } 0 \text{ à } +\infty, \\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ croît de } 0 \text{ à } +\infty. \end{cases}$

Cela étant, d'après ce que nous avons vu plus haut (n° **298**), $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ varie dans le même sens que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ou en sens contraire, suivant que a est positif ou négatif.

Enfin, comme y se déduit de $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ en lui ajoutant une *constante*, $\frac{4ac-b^2}{4a}$, y varie dans le même sens que $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

De là résulte immédiatement la variation de y, qui se résume dans les deux tableaux suivants :

$a > 0$

x	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	y
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
croît	décroît	décroît	décroît
$-\frac{b}{2a}$	o	o	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ (*min.*)
croît	croît	croît	croît
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$a < 0$

x	$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$	$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	y
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
croît	décroît	croît	croît
$-\frac{b}{2a}$	o	o	$\frac{4ac-b^2}{4a}$ (*max.*)
croît	croît	décroît	décroît
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

On voit que lorsque a est *positif* le trinôme est *minimum* pour $x = -\frac{b}{2a}$. En d'autres termes, la valeur $\frac{4ac-b^2}{4a}$, qu'il atteint pour $x = -\frac{b}{2a}$, est la *plus petite* des valeurs qu'il puisse prendre.

Lorsque a est *négatif*, le trinôme est *maximum* pour $x = -\frac{b}{2a}$. La valeur correspondante $\frac{4ac-b^2}{4a}$ est la *plus grande* des valeurs qu'il puisse prendre.

Exemple. — *Considérons le trinôme :*

$$y = x^2 + 3x - 5.$$

Nous le décomposons en carrés. Il s'écrit :

$$y = x^2 + 2\frac{3}{2}x - 5 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}.$$

Sous cette forme, on voit que :

$$1^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} x, \text{ croissant de } -\infty \text{ à } -\frac{3}{2}, \\ x + \frac{3}{2}, \text{ croît de } -\infty \text{ à } 0, \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \text{ décroît de } +\infty \text{ à } 0, \\ y \text{ décroît de } +\infty \text{ à } -\frac{29}{4}. \end{array} \right.$$

$$2^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} x, \text{ croissant de } -\frac{3}{2} \text{ à } +\infty, \\ x + \frac{3}{2} \text{ croît de } 0 \text{ à } +\infty, \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \text{ croît de } 0 \text{ à } +\infty. \\ y \text{ croît de } -\frac{29}{4} \text{ à } +\infty. \end{array} \right.$$

Le trinôme est *minimum* pour $x = -\frac{3}{2}$.

La valeur correspondante $-\frac{29}{4}$ est la plus petite des valeurs que puisse prendre le trinôme; en d'autres termes, il n'existe aucune valeur de x pour laquelle le trinôme $x^2 + 3x - 5$ prend une valeur numérique inférieure à $-\frac{29}{4}$.

La variation précédente se résume dans le tableau suivant :

x	$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$	y
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
croît	décroît	décroît
$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{29}{4}$ (*min.*)
croît	croît	croît
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

303. — Changement de coordonnées. — Avant d'étudier la représentation graphique de la variation du trinôme, nous traiterons le problème suivant :

Connaissant les coordonnées x, y, *d'un point quelconque* M *par rapport à un système d'axes* Ox, Oy, *calculer ses coordonnées* x', y', *par rapport à un système d'axes* O'x', O'y' *parallèles aux premiers.*

Pour définir la position des nouveaux axes $O'x'$, $O'y'$ par rapport aux anciens, il suffit (fig. 34) de connaître les coordonnées $\overline{OA} = x_0$, $\overline{OB} = y_0$ de la nouvelle origine O', par rapport aux anciens axes Ox, Oy.

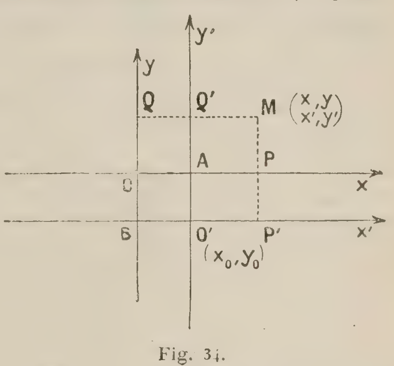


Fig. 34.

Cela étant, soit M un point quelconque du plan. Abaissons les perpendiculaires MP sur Ox et MQ sur Oy qui coupent, la première $O'x'$ en P', la seconde $O'y'$ en Q'.

On a, par définition des coordonnées,

$$\overline{OP} = x, \quad \overline{OQ} = y;$$
$$\overline{O'P'} = x' \quad \overline{O'Q'} = y'.$$

Or, on a, d'après les formules connues sur les segments (n° **75**) :

$$(1) \qquad \begin{cases} \overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}, \\ \overline{OQ} = \overline{OB} + \overline{BQ}, \end{cases}$$

et ceci, dans tous les cas, en grandeur et en signe.

Or,
$$\overline{AP} = \overline{O'P'} = x',$$
$$\overline{BQ} = \overline{O'Q'} = y'.$$

Par suite, les égalités (1) peuvent s'écrire :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Ce sont là les *formules de changement de coordonnées.* Elles permettent de calculer x, y connaissant x' et y', et inversement de calculer x' et y' connaissant x et y.

304. — Courbe représentative de la variation du trinôme. — Considérons le trinôme

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Nous avons vu plus haut (n° **269**) qu'il peut se mettre sous la forme :

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Posons :

$$(3) \qquad \begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a}, \\ y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}. \end{cases}$$

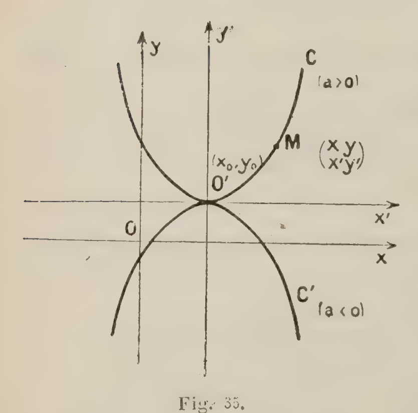


Fig. 35.

Le trinôme s'écrit alors :

$$(4) \qquad y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Ceci posé, traçons (fig. 35) deux axes $O'x'$, $O'y'$ parallèles aux axes Ox et Oy, et tels que les coordonnées de la nouvelle origine O' soient les nombres x_0 et y_0 définis par les égalités (3). Soit M un point de la courbe représentative de la variation du trinôme, x et y ses coordonnées par rapport aux axes

Ox et Oy, x' et y' ses coordonnées par rapport aux nouveaux axes $O'x'$, $O'y'$.

D'abord, le point M étant un point de la courbe représentative de la variation du trinôme, ses coordonnées x et y vérifient l'égalité (4). En second lieu, on a entre x', y' et x, y les relations (2) (n° 303).

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y', \end{cases}$$

qui sont les formules de changement de coordonnées. En remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation (4), elle prend la forme :

$$y' = ax'^2.$$

Ceci prouve que *par rapport aux nouveaux axes* $O'x'$, $O'y'$, la courbe cherchée n'est autre chose que la courbe représentative de la variation de la fonction

$$y' = ax'^2$$

de la variable x'.

Nous sommes ainsi ramenés à un cas traité précédemment. La courbe est une *parabole* ayant le point O' pour sommet et l'axe $O'y'$ pour axe de symétrie.

Si $a > 0$, la courbe a la forme C (fig. 35) et tourne son ouverture vers le haut.

Si $a < 0$, la courbe a la forme C' (fig. 35) et tourne son ouverture vers le bas.

305. — Exemple. — *Construisons la courbe représentative de la variation du trinôme*

$$y = x^2 + 3x - 5$$

étudié plus haut.

Nous l'écrirons :

$$y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4}.$$

Traçons (fig. 36) les axes $O'x'$, $O'y'$ tels que les coordonnées x_0 y_0 de la nouvelle origine soient :

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2}, \\ y_0 = -\frac{29}{4}. \end{cases}$$

L'équation de la courbe cherchée par rapport aux nouveaux axes s'obtiendra en faisant le changement de coordonnées :

$$x = -\frac{3}{2} + x',$$

$$y = -\frac{29}{4} + y'.$$

Ceci donne :

$$y' = x'^2.$$

C'est donc une parabole (fig. 36) ayant pour sommet le point O′ et pour axe la droite $O'y'$. Son ouverture est tournée vers le haut.

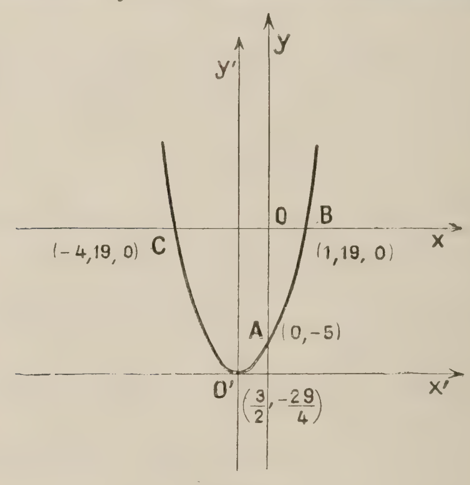


Fig. 36.

Pour tracer cette courbe avec plus de précision, marquons-en quelques points.

D'abord le point A où la courbe coupe Oy ayant une abscisse nulle, s'obtient en faisant $x = 0$. La valeur correspondante de y est -5.

Ensuite, les points B et C où la courbe coupe Ox ont des ordonnées nulles. Pour ces points on a $y = 0$. Par suite, les valeurs sont telles que l'on ait :

$$0 = x^2 + 3x - 5.$$

Cette équation a deux racines :

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{29}}{2} = 1,19,$$

$$x_2 = \frac{-3-\sqrt{29}}{2} = -4,19.$$

Ce sont les abscisses des points B et C.

306. — Signification géométrique de la résolution d'une équation du second degré. — Soit :

(1) $$ax^2 + bx + c = 0$$

une équation du second degré, et considérons la *fonction*

(2) $$y = ax^2 + bx + c.$$

Résoudre l'équation (1) *c'est trouver les valeurs particulières de* x *pour lesquelles la fonction* y *prend la valeur numérique zéro.*

Si, alors, on construit la courbe représentative de la variation du trinôme (2), les points qui auront pour abscisses les racines x' et x'' de l'équation (1) auront des ordonnées *nulles*. Ce seront donc des points *situés sur l'axe* Ox.

Résoudre l'équation (1), *c'est donc trouver les abscisses des points de rencontre de la parabole* (2) *avec l'axe* Ox.

Les résultats trouvés au n° **256** s'expliquent alors aisément.

Supposons par exemple $a > 0$.

1° Si $b^2 - 4ac > 0$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ est négatif, le sommet O′ de la parabole est (fig. 37) *au-dessous* de Ox et, comme la parabole est tournée vers le haut, elle coupe Ox en deux points, il y a deux racines.

2° Si $b^2 - 4ac = 0$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$.

Le sommet O′ de la parabole est sur Ox ; il n'y a plus

qu'un point sur Ox, c'est O′. Il n'y a qu'*une* racine. Dans ce cas la parabole est tangente à Ox. On peut dire que les deux points d'intersection sont venus se *confondre* en un

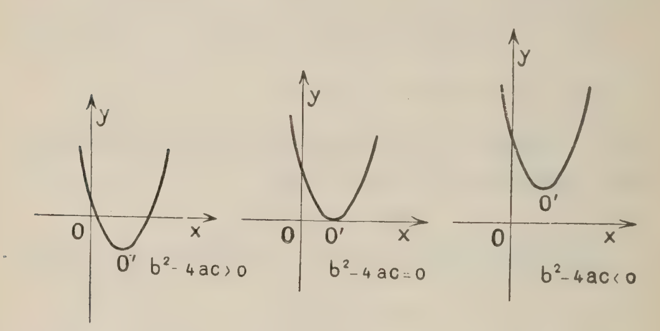


Fig. 37.

seul. On peut donc dire qu'il y a *deux racines confondues*, *deux racines égales*.

3° Si $b^2 - 4ac < 0$, $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ est positif.

Le sommet O′ de la parabole est au-dessus de Ox. La parabole est tout entière au-dessus de Ox, elle ne coupe pas Ox. Il n'y a *pas* de racines.

§ 2. — Variation de la fonction $\dfrac{ax + b}{a'x + b'}$.

307. — Variation de la fonction $\dfrac{1}{x}$. — Soit x une variable indépendante, proposons-nous d'étudier la variation de son inverse.

Remarquons à cet effet que les valeurs absolues de x et $\dfrac{1}{x}$ varient en sens inverse; quand la valeur absolue de x augmente celle de $\dfrac{1}{x}$ diminue.

D'autre part, lorsque x est très grand en valeur absolue $\frac{1}{x}$ est très petit en valeur absolue, c'est-à-dire très voisin de o.

Plus x est grand, plus $\frac{1}{x}$ est voisin de *zéro*.

Ainsi, pour $x = 1\,000$, on a : $\frac{1}{x} = 0{,}001$,

pour $x = 1\,000\,000$, on a : $\frac{1}{x} = 0{,}000\,001$,

etc...

On peut donc dire que, quand x est infiniment grand, $\frac{1}{x}$ est *nul*.

Au contraire, lorsque x *tend vers zéro*, son inverse $\frac{1}{x}$ *croît indéfiniment*.

Nous retrouvons là un fait déjà rencontré plusieurs fois (nos **106**, **107**, **151**). Lorsque dans une fraction le dénominateur devient très petit, cette fraction devient très grande.

De ces remarques préliminaires résulte immédiatement la variation de $\frac{1}{x}$.

Quand x croît de $-\infty$ à o, par valeurs négatives, sa valeur absolue décroît de $+\infty$ à o, la valeur absolue de $\frac{1}{x}$ croît de o à $+\infty$ et $\frac{1}{x}$ décroît de o à $-\infty$, par valeurs négatives; car quand x tend vers zéro par valeurs négatives, $\frac{1}{x}$ croît indéfiniment par valeurs négatives.

Pour $x = 0$, $\frac{1}{x}$ n'a pas de sens.

Lorsque x croît de o à $+\infty$ par valeurs positives, son inverse $\frac{1}{x}$ décroît de $+\infty$ à o par valeurs positives.

En résumé, $\frac{1}{x}$ décroît sans cesse.

Pour $x = 0$, il y a ce qu'on appelle une *discontinuité*, la

fonction n'a pas de valeur définie, elle passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$, c'est-à-dire d'une valeur excessivement grande et négative à une valeur excessivement grande et positive. C'est un fait que nous avons déjà rencontré au n° **104**. Tous ces résultats se résument dans le tableau ci-joint, dans lequel nous avons mis une barre en face de o, pour indiquer qu'il n'y a pas de valeur correspondante pour y.

x	y
$-\infty$	o
croît	décroît
	$-\infty$
o	———
	$+\infty$
croît	décroît
$+\infty$	o

308. — Représentation graphique de la variation de $y = \frac{1}{x}$. — Prenons deux axes rectangulaires et choisissons une unité de longueur arbitraire.

1° Lorsque x croît de $-\infty$ à o, y est négatif et décroît de o à $-\infty$.

Traçons quelques points.

pour	$x = -2$,	on a :	$y = -\frac{1}{2}$,	ce qui donne le point	A',
—	$x = -1$,	—	$y = -1$,	—	B'
—	$x = -\frac{1}{2}$,	—	$y = -2$,	—	C',
—	$x = -\frac{1}{3}$,	—	$x = -3$,	—	D'

En joignant par un trait continu, on a une branche de courbe descendante A'B'C'D', située au-dessous de Ox (fig. 38).

2° Lórsque x croît de o à $+\infty$, y est positif et décroît de $+\infty$ à o.

Marquons encore quelques points :

pour	$x = \frac{1}{2}$,	on a :	$y = 2$,	ce qui donne le point	A,
—	$x = 1$,	—	$y = 1$,	—	B,
—	$x = 2$,	—	$y = \frac{1}{2}$,	—	C,
—	$x = 3$,	—	$y = \frac{1}{3}$,	—	D.

En joignant par un trait continu, on a ainsi une seconde branche de courbe ABCD descendante, située tout entière au-dessus de Ox (fig. 38).

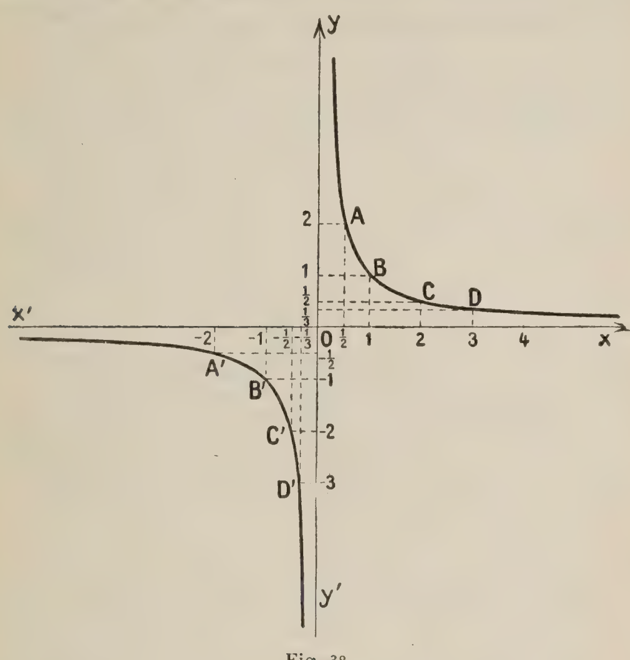


Fig. 38.

309. — Asymptotes. — *On dit qu'une droite est* **asymptote** *à une branche de courbe infinie si la distance d'un point de la courbe à la droite tend vers zéro lorsque ce point s'éloigne indéfiniment sur la branche de courbe. Inversement la branche de courbe est dite asymptote à la droite.*

Nous allons montrer que :

Les deux branches de la courbe représentative de la variation de la fonction $y = \frac{1}{x}$ ***sont asymptotes aux axes de coordonnées.***

Soit, en effet, M un point de la courbe. Abaissons de ce point les perpendiculaires MP et MQ sur Ox et Oy (fig. 39). MQ est égal à OP et, par suite, à la valeur absolue de x; MP est égal à OQ et, par suite, à la valeur absolue de y :

$$MQ = |x| \quad , \quad MP = |y|.$$

Cela étant,

1° Lorsque x croît indéfiniment, y tend vers zéro, le

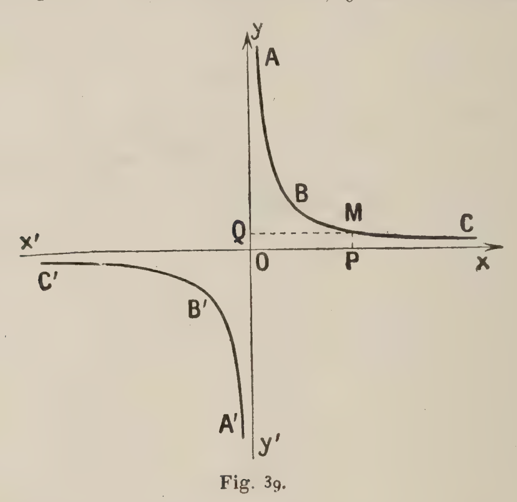


Fig. 39.

point M s'éloigne indéfiniment dans le sens Ox et MP tend vers zéro.

La distance MP du point M à Ox tendant vers zéro le point M décrit une branche de courbe asymptote à Ox.

Lorsque x croît indéfiniment par valeurs positives, M décrit la branche BC (fig. 39) asymptote à Ox et au-dessus.

Lorsque x croît indéfiniment par valeurs négatives, M décrit la branche B′C′ asymptote à Ox' et au-dessous.

2° Lorsque x tend vers *zéro*, y croît indéfiniment. Dans ce cas le point M s'éloigne indéfiniment dans le sens Oy et $MQ = |x|$ tend vers zéro.

La distance MQ du point M à Oy tendant vers zéro, le point M décrit une branche asymptote à Oy.

Lorsque x tend vers zéro par valeurs positives, y croît indéfiniment par valeurs positives et M décrit la branche BA (fig. 39) asymptote à Oy en haut.

Lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives, le point M est à gauche de Oy et décrit la branche de courbe B′A′, asymptote à Oy' en bas.

310. — Axes et centre. — Nous avons déjà vu que la parabole qui représente graphiquement les variations de $y = ax^2$ admet un axe de symétrie.

D'une façon générale, *on dit qu'une courbe admet un* **axe de symétrie**, *si les points de cette courbe sont deux à deux symétriques par rapport à une droite, appelée axe de symétrie.*

On dit qu'une courbe admet un **centre** *si les points de cette courbe sont deux à deux symétriques par rapport à un point, appelé centre.*

Nous allons démontrer les deux propositions suivantes :

La courbe représentative de la variation de $y = \frac{1}{x}$ admet deux axes de symétrie qui sont les bissectrices de l'angle xOy des axes de coordonnées et elle admet un centre qui est l'origine des coordonnées.

Prenons, en effet, un point quelconque M de la courbe, soit m son abscisse; son ordonnée sera $y = \frac{1}{m}$. Considérons alors le point M′ (fig. 40) dont l'abscisse est égale à $\frac{1}{m}$; son ordonnée sera $y = \frac{1}{\left(\frac{1}{m}\right)} = m$. L'ordonnée du point M′ est égale à l'abscisse du point M. On a donc :

$$\text{OP} = \text{OP}'$$

et la figure OPRP′ est un carré. La droite OR est donc la

bissectrice de l'angle xOy puisque c'est une diagonale de ce carré.

De même, l'abscisse du point M′ est égale à l'ordonnée du point M et on a :

$$OQ = OQ'.$$

La figure OQSQ′ est donc aussi un carré et sa diagonale OS est aussi la bissectrice de l'angle xOy.

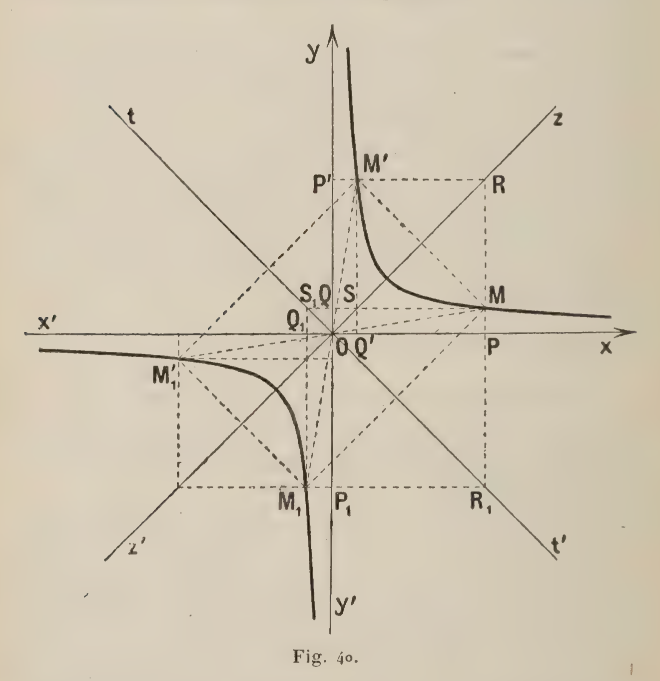


Fig. 40.

Les trois points O, R et S sont donc en ligne droite sur la bissectrice Oz de l'angle xOy. Mais la figure MRM′S est aussi un carré, car ses quatre angles sont droits et on a :

$$MS = Q'P = OP - OQ' = OP' - OQ = P'Q = M'S.$$

Il en résulte que MM′, qui est la seconde diagonale de

ce carré, est perpendiculaire à la première diagonale Oz et est partagée par elle en deux parties égales.

En d'autres termes, les points M et M′ sont symétriques par rapport à la bissectrice Oz.

On en conclut bien que la droite Oz est un *axe de symétrie* de la courbe, puisque à chaque point M correspond un point M′ de la courbe symétrique par rapport à Oz.

Considérons maintenant le point M_1 (fig. 40) d'abscisse $-\frac{1}{m}$; son ordonnée sera $y = \frac{1}{\left(-\frac{1}{m}\right)} = -m$.

Il en résulte que l'abscisse de l'un des points M ou M_1 est *opposée* à l'ordonnée de l'autre, on a donc

$$\overline{OP} = -\overline{OP_1} \quad \text{et} \quad \overline{OQ} = -\overline{OQ_1}$$

et, entre les *longueurs*,

$$OP = OP_1 \quad \text{et} \quad OQ = OQ_1.$$

En raisonnant comme plus haut, on verrait que les quadrilatères OPR_1P_1, OQS_1Q_1 et $MS_1M_1R_1$, sont des carrés; et par suite que la droite S_1R_1 est la bissectrice de l'angle xOy' et que M et M_1 sont symétriques par rapport à cette bissectrice tOt'.

La seconde bissectrice tt' de l'angle des axes de coordonnées est donc bien aussi un axe de symétrie.

Considérons, enfin, le point M'_1 d'abscisse $-m$. Son ordonnée est $y = -\frac{1}{m}$.

En raisonnant, comme nous l'avons fait, on verrait que M'_1 est le symétrique de M_1 par rapport à $z'z$ et le symétrique de M′ par rapport à $t't$.

Ceci résulte d'ailleurs immédiatement du tableau suivant qui donne les coordonnées des 4 points M, M′, M_1, M'_1.

	x	y	symétrique par rapport à zz'	symétrique par rapport à tt'
M	m	$\frac{1}{m}$	M′	M_1
M′	$\frac{1}{m}$	m	M	M'_1
M_1	$-\frac{1}{m}$	$-m$	M'_1	M
M'_1	$-m$	$-\frac{1}{m}$	M_1	M′

Lorsque, pour deux points, l'abscisse de l'un est *égale* à l'ordonnée de l'autre, ils sont symétriques par rapport à zz'.

Lorsque, pour deux points, l'abscisse de l'un est *opposée* à l'ordonnée de l'autre, ils sont symétriques par rapport à tt'.

De tout ceci, il résulte que la figure $MM'M'_1M_1$ est un rectangle et que zz' et tt' sont les perpendiculaires au milieu des côtés. Le point O est donc le *centre* du rectangle et les points M et M'_1, qui sont deux sommets opposés de ce rectangle, sont symétriques par rapport à O.

A tout point M de la courbe correspond donc un point M'_1 symétrique par rapport à O : le point O est donc le *centre* de la courbe.

311. — Résumé. — La courbe représentative de la variation de la fonction $y=\frac{1}{x}$ est une courbe qui est formée de deux *branches infinies*.

Ces deux branches sont *asymptotes* aux axes de coordonnées.

La courbe admet, de plus, deux *axes de symétrie* qui

sont les deux bissectrices de l'angle des axes de coordonnées, et elle admet un *centre* qui est l'origine des coordonnées.

Cette courbe est ce qu'on appelle, en géométrie, une **hyperbole équilatère**.

L'épithète *équilatère* provient de ce que les deux asymptotes sont *rectangulaires*.

312. — Variation de $\frac{c}{x}$. — Nous avons déjà remarqué, au n° **298**, que, lorsqu'on multiplie une quantité par un nombre fixe, si le multiplicateur est *positif*, le produit varie dans *le même sens* que cette quantité; et si le multiplicateur est *négatif*, le produit varie en *sens inverse* de la quantité multipliée.

Nous avons donc deux cas à distinguer, suivant que c est positif ou négatif.

313. — Cas de $c > 0$. Si le multiplicateur c est positif, la fonction $y = \frac{c}{x}$ varie exactement de la même façon que la fonction $y = \frac{1}{x}$, elle va donc sans cesse en *décroissant*.

La courbe représentative est encore une hyperbole équilatère qui a la même forme et la même disposition que précédemment.

314. — Cas de $c < 0$. — Lorsque le multiplicateur c est négatif, la fonction $y = \frac{c}{x}$ varie en sens inverse de la fonction $y = \frac{1}{x}$, elle va donc sans cesse *en croissant*.

Lorsque x est positif, y est négatif; et lorsque x est négatif, y est positif. On peut donc immédiatement déduire le tableau de la variation de $\frac{c}{x}$ de celui de la variation de $\frac{1}{x}$.

Pour avoir la courbe représentative de la variation, il suffit de faire une remarque analogue à celle faite plus haut (n° **300**), à propos de la courbe $y = ax^2$.

Les courbes représentatives de deux fonctions $y = \frac{c}{x}$ pour deux valeurs *opposées* de c sont *symétriques par rapport à* Ox.

$c < 0$		
x	$\frac{1}{x}$	$\frac{c}{x}$
$-\infty$	0	0
croît	négative décroît	positive croît
	$-\infty$	$+\infty$
0		
	$+\infty$	$-\infty$
croît	positive décroît	négative croît
$+\infty$	0	0

Considérons, par exemple, les deux fonctions

$$y = \frac{3}{x} \quad , \quad y = \frac{-3}{x}.$$

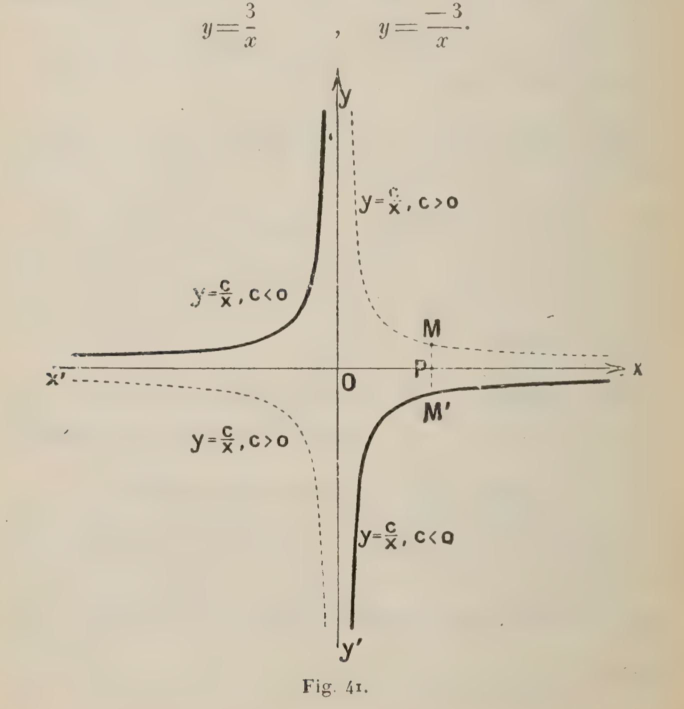


Fig. 41.

Pour une même valeur de x, on obtient deux valeurs de y opposées, on obtient donc deux points M et M′ (fig. 41) ayant même abscisse OP; mais des ordonnées $\overline{PM}$ et $\overline{PM'}$ opposées. Les deux points M et M′ sont donc symétriques par rapport à Ox.

Lorsque le point M décrit la courbe $y=\frac{3}{x}$, marquée en trait pointillé, le point M′ décrit la courbe symétrique, représentative de la variation de $y=\frac{-3}{x}$, tracée en trait plein.

On voit donc que la courbe représentative de la variation de $y=\frac{c}{x}$, lorsque c est négatif, est encore une hyperbole équilatère admettant Ox et Oy pour asymptotes, mais située dans les angles x'Oy et xOy'.

315. — Variation de la fonction $y=\frac{ax+b}{x}$. — Pour étudier la variation de cette fonction, il nous suffit de remarquer que

$$\frac{ax+b}{x}=\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}=a+\frac{b}{x}.$$

Cette fonction se déduit donc de $\frac{b}{x}$ en lui ajoutant le nombre *fixe* a.

Or, puisque en ajoutant aux deux membres d'une inégalité un même nombre, cette inégalité subsiste (nº **69**), il est clair qu'en ajoutant un nombre *fixe* à une quantité variable, on obtient une quantité qui varie dans le même sens.

Donc la fonction

$$y=a+\frac{b}{x}$$

varie dans le même sens que $y=\frac{b}{x}$.

On peut remarquer ici que la fonction s'annule pour la valeur de x pour laquelle

$$a+\frac{b}{x}=0$$

ou

$$ax+b=0,$$

ou

$$x=-\frac{b}{a}.$$

Exemple. — *Considérons, par exemple, la fonction*

$$y=\frac{2x+3}{x}.$$

Elle s'écrit :

$$y=2+\frac{3}{x},$$

elle varie donc dans le même sens que $\frac{3}{x}$, elle va sans cesse en décroissant. Elle s'annule pour

$$2+\frac{3}{x}=0$$

ou

$$x=-\frac{3}{2}.$$

Pour avoir le tableau des valeurs de cette fonction, il suffit de prendre le tableau des valeurs de $\frac{3}{x}$ et d'ajouter à ces valeurs le *nombre fixe* 2.

x	$\frac{3}{x}$	y
$-\infty$	0	2
croît	décroît	positive décroît
$-\frac{3}{2}$	-2	0
	décroît	négative
croît		décroît
0	$-\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$
croît	décroît	positive décroît
$+\infty$	0	2

316. — Courbe représentative de la variation de $y=\frac{ax+b}{x}$. — Traçons deux axes rectangulaires Ox et Oy (fig. 42), et marquons un axe O_1x_1 parallèle à Ox et

de même sens, tel que le point O_1 où il coupe Oy ait pour ordonnée

$$\overline{OO_1} = a.$$

Faisons alors un *changement d'axes* (n° **303**), et prenons pour nouveaux axes : l'axe O_1x_1 que nous venons de tracer

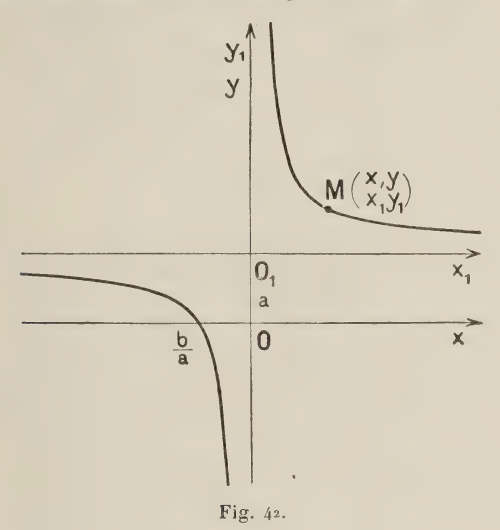


Fig. 42.

et un axe O_1y_1 coïncidant avec Oy. Les coordonnées de la nouvelle origine O_1 par rapport aux premiers axes Ox et Oy seront :

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = a. \end{cases}$$

Si donc nous appelons x, y les coordonnées d'un point M par rapport aux premiers axes, et x_1, y_1 les coordonnées du *même* point par rapport aux nouveaux axes, nous aurons, en appliquant les formules (2) du n° **303** :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x_1, \\ y = a + y_1. \end{cases}$$

Ceci posé, pour tout point M de la courbe qui représente la variation de la fonction $y = \frac{ax+b}{x}$, on a :

$$(2) \qquad y = a + \frac{b}{x}.$$

Remplaçons y et x par leurs valeurs fournies par les égalités (1) et il vient :

$$a + y_1 = a + \frac{b}{x_1}$$

ou, en simplifiant,

$$y_1 = \frac{b}{x_1}.$$

Donc, *par rapport aux axes* $O_1 x_1$ *et* $O_1 y_1$ *la courbe a la même équation que plus haut.*

Nous sommes ramenés au cas précédent puisque y_1 est de la forme $\frac{b}{x_1}$.

La courbe cherchée est donc une hyperbole équilatère qui admet pour asymptotes (fig. 42) les *nouveaux axes* $O_1 x_1$ et $O_1 y_1$.

Pour construire la courbe représentative de

$$y = \frac{ax+b}{x}$$

il suffit de construire, par rapport aux nouveaux axes O_1x_1, O_1y_1 la courbe

$$y_1 = \frac{b}{x_1}.$$

Cette courbe coupe Ox au point d'abscisse $-\frac{a}{b}$.

Ainsi, par exemple, pour construire la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{2x+3}{x},$$

considérée plus haut, on prendra $\overline{OO_1} = 2$. On construira l'hyperbole

qui a pour asymptotes O_1x_1 et O_1y_1 et qui représente la variation de

$$y_1 = \frac{3}{x_1}.$$

Cette courbe coupe Ox au point d'abscisse $-\frac{3}{2}$.

317. — Application. — *Courbe représentative de la variation du rapport des distances d'un point d'un axe à deux points fixes de cet axe.*

Nous avons vu (chap. II, § 4) que si l'on considère deux points fixes A et B d'un axe, le rapport

$$y = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}$$

se met sous la forme :

$$y = \frac{x - a}{x},$$

en désignant par a le segment $\overline{AB}$ et par x l'abscisse $\overline{AM}$ du point M.

Pour mieux se rendre compte de la variation de ce rapport y, représentons-le graphiquement.

Prenons, à cet effet sur la droite AB (fig. 43) le point A pour origine O des abscisses. Le sens AB comme sens positif et la droite AB pour axe des x. Élevons au point A (ou O) une perpendiculaire Oy.

Soit alors M un point quelconque de la droite AB. Élevons en M une perpendiculaire MP et prenons sur cette perpendiculaire un segment $\overline{MP}$ égal à y, P étant au-dessus de Ox quand y est positif et au-dessous quand y est négatif. Le point P a pour coordonnées x et y et quand x varie, le point P décrit la courbe représentative de la variation du rapport $y = \frac{x - a}{x}$.

Ce rapport s'écrit :

$$y = 1 - \frac{a}{x}.$$

D'après ce qui précède, pour construire cette courbe, nous prenons sur Oy un segment $\overline{OO_1} = 1$ et nous construisons par rapport aux axes O_1x_1 et O_1y_1 (coïncidant avec Oy) la courbe représentative de la fonction

$$y_1 = -\frac{a}{x_1}.$$

Ici le nombre b est égal à $-a$; il est donc négatif. L'hyperbole est placée dans les angles $x'O_1\,y_1$ et $x_1O_1y'_1$.

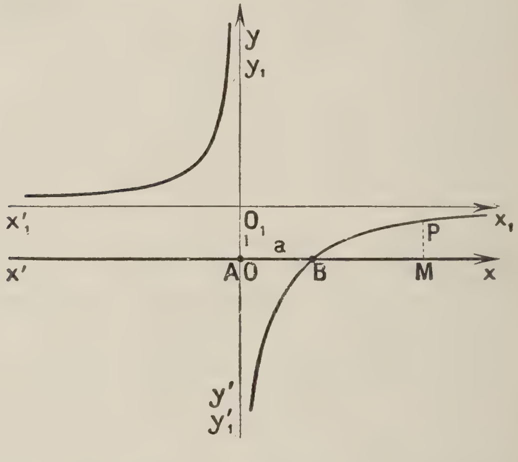


Fig. 43.

Elle admet pour asymptotes O_1x_1 et O_1y_1. D'ailleurs elle coupe Ox au point $x = a$, c'est-à-dire au point B.

Cette hyperbole étant tracée, on se rend aisément compte, *de visu*, de la variation de y.

Pour avoir la valeur du rapport $\dfrac{\overline{BM}}{\overline{AM}}$ pour un point M de la droite AB, on élève en M une perpendiculaire à AB jusqu'en sa rencontre P avec l'hyperbole. La mesure algébrique du segment $\overline{MP}$ est la valeur du rapport en M.

Dans la portion $x'A$ le rapport y est plus grand que $\overline{OO_1}$, c'est-à-dire *plus grand que* 1.

Dans la portion AB le rapport y est négatif puisque la courbe est au-dessous de Ox.

Enfin, dans la portion Bx le rapport y est positif, mais plus petit que OO_1 c'est-à-dire plus petit que 1.

Toutes les circonstances trouvées au chapitre II (§ 4) sont bien mises en évidence.

318. — Cas général. — Considérons maintenant la fonction

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}.$$

Pour l'étudier, nous remarquerons que son numérateur peut s'écrire :

$$ax+b = \frac{a}{a'}(a'x+b') - \frac{ab'}{a'} + b,$$

car il suffit de développer et de réduire le second membre pour retrouver le premier. Ceci s'écrit encore :

$$ax+b = \frac{a}{a'}(a'x+b') + \frac{ba'-ab'}{a'}.$$

La fonction proposée s'écrit alors :

$$y = \frac{\frac{a}{a'}(a'x+b') + \frac{ba'-ab'}{a'}}{a'x+b'}$$

ou :

$$y = \frac{\frac{a}{a'}(a'x+b')}{a'x+b'} + \frac{\frac{ba'-ab'}{a'}}{a'x+b'}.$$

La première fraction du second membre peut se simplifier, car les deux termes sont divisibles par $a'x+b'$.

Divisons les deux termes de la seconde fraction par a' et nous obtenons :

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\frac{ba' - ab'}{a'^2}}{x + \frac{b'}{a'}}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{ba' - ab'}{a'^2} = c,$$

et la fonction y se met sous la forme définitive :

$$(1) \qquad y = \frac{a}{a'} + \frac{c}{x + \frac{b'}{a'}}.$$

Sous cette forme, la variation de la fonction est évidente.

D'abord, on voit que la fonction y varie dans le même sens que $\frac{c}{x + \frac{b'}{a'}}$, puisque y se déduit de cette expression en lui ajoutant la quantité *constante* $\frac{a}{a'}$, (n° **315**). Nous sommes ainsi ramenés à étudier la variation de $\frac{c}{x + \frac{b'}{a'}}$.

Or, cette quantité varie elle-même dans le même sens que $\frac{1}{x + \frac{b'}{a'}}$, ou en sens contraire, suivant que c est positif ou négatif.

319. — Variation de $\frac{1}{x + \frac{b'}{a'}}$. — La quantité $\frac{1}{x + \frac{b'}{a'}}$ devient infiniment grande lorsque son dénominateur est

nul, c'est-à-dire lorsque l'on a :

$$x = -\frac{b'}{a'}.$$

D'autre part, elle varie évidemment en sens contraire de son dénominateur et est de même signe que lui. Elle est donc positive lorsque x est plus grand que $-\frac{b'}{a'}$ et négative lorsque x est plus petit que $-\frac{b'}{a'}$.

$$x \textit{ croissant } \text{de } -\infty \text{ à } -\frac{b'}{a'},$$

$$x + \frac{b'}{a'} \textit{ croît } \text{de } -\infty \text{ à } 0,$$

donc $$\frac{1}{x + \frac{b}{a'}} \textit{ décroît } \text{de } 0 \text{ à } -\infty.$$

Ensuite,

$$x \textit{ croissant } \text{de } -\frac{b'}{a'} \text{ à } +\infty,$$

$$x + \frac{b'}{a'} \textit{ croît } \text{de } 0 \text{ à } +\infty,$$

donc $$\frac{1}{x + \frac{b'}{a'}} \textit{ décroît } \text{de } +\infty \text{ à } 0.$$

Pour $x = -\frac{b'}{a'}$ la fraction $\frac{1}{x + \frac{b'}{a'}}$ change de signe en devenant infiniment grande; elle passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$.

Les résultats précédents se résument dans le tableau ci-contre.

x	$\frac{1}{x + \frac{b'}{a'}}$
$-\infty$	0
croît	décroît négatif
$-\frac{b'}{a'}$	$-\infty$ / $+\infty$
croît	décroît positif
$+\infty$	0

320. — Cas de $ba' - ab' > 0$. — Si $ba' - ab'$ est positif, c est positif. La fraction $\dfrac{c}{x + \dfrac{b'}{a'}}$ varie alors dans le même sens que $\dfrac{1}{x + \dfrac{b'}{a'}}$; il en est donc de même de y qui, par suite, *décroît toujours*.

On a alors le tableau de variation ci-contre qui se passe de commentaires.

x	$\dfrac{c}{x+\dfrac{b'}{a'}}$	y
$-\infty$	0	$\dfrac{a}{a'}$
croît	décroît	décroît
$-\dfrac{b'}{a'}$	$-\infty$ / $+\infty$	$-\infty$ / $+\infty$
croît	décroît	décroît
$+\infty$	0	$\dfrac{a}{a'}$

321. — Cas de $ba' - ab' < 0$. — Lorsque $ba' - ab'$ est négatif, c est aussi négatif. La fraction $\dfrac{c}{x + \dfrac{b'}{a'}}$ varie en *sens contraire* de $\dfrac{1}{x + \dfrac{b'}{a'}}$; il en est donc de même de y, qui, par suite, *croît toujours*.

Le tableau de la variation est alors le suivant :

x	$\dfrac{c}{x+\dfrac{b'}{a'}}$	y
$-\infty$	0	$\dfrac{a}{a'}$
croît	croît	croît
$-\dfrac{b'}{a'}$	$+\infty$ / $-\infty$	$+\infty$ / $-\infty$
croît	croît	croît
$+\infty$	0	$\dfrac{a}{a'}$

Dans les deux cas, y s'annule pour la valeur

$$x = -\frac{b}{a},$$

qui annule son numérateur.

322. — Résumé. — De tout ce qui précède il résulte

que la fonction

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

varie toujours *dans le même sens.*

1° Lorsque $ba' - ab' > 0$, elle est *décroissante*;

2° Lorsque $ba' - ab' < 0$, elle est *croissante*;

3° Lorsque $ba' - ab' = 0$, elle est *constante.*

Dans ce dernier cas, en effet, c est *nul*, et la forme (1) (n° **318**) montre que l'on a toujours

$$y = \frac{a}{a'}.$$

323. — Représentation graphique de la variation de la fonction $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ — Nous avons vu (n° **318**) que la fonction y peut se mettre sous la forme :

(1) $$y = \frac{a}{a'} + \frac{c}{x + \frac{b'}{a'}},$$

à condition de poser

$$c = \frac{ba' - ab'}{a'^2}.$$

Cette forme va nous permettre de ramener la construction de la courbe à un cas déjà traité.

Traçons, en effet, deux axes rectangulaires Ox et Oy, et menons deux nouveaux axes O$'x'$ et O$'y'$ (fig. 44) parallèles aux premiers, le point O$'$ ayant pour coordonnées

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{b'}{a'}, \\ y_0 = \frac{a}{a'}. \end{cases}$$

Soit M un point quelconque du plan, de coordonnées x et y par rapport aux premiers axes Ox et Oy, et de coordonnées x' et y' par rapport aux nouveaux axes O$'x'$ et O$'y'$.

D'après les *formules de changement de coordonnées* (n° **303**) on a :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

ou, en remplaçant x_0 et y_0 par leurs valeurs,

$$(3) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{b'}{a'} + x', \\ y = \dfrac{a}{a'} + y'. \end{cases}$$

Cela étant, si M est (fig. 44) un point de la courbe

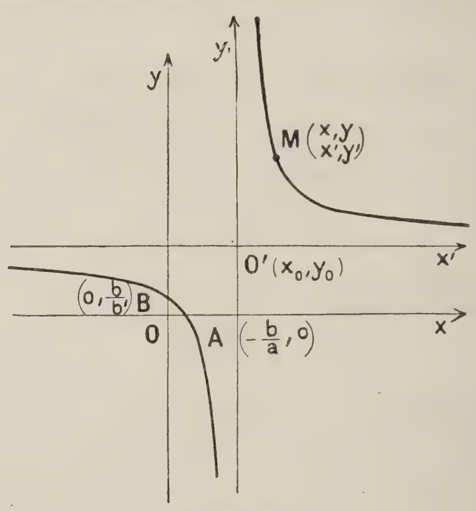


Fig. 44.

représentative de la fonction donnée, ses coordonnées x et y vérifieront la relation (1); par suite, les coordonnées x' et y' vérifieront la relation obtenue en remplaçant dans (1) x et y par leurs valeurs fournies par les formules (3). On aura donc :

$$\frac{a}{a} + y' = \frac{a}{a'} + \frac{c}{-\dfrac{b'}{a'} + x' + \dfrac{b'}{a'}}.$$

Ceci donne, en simplifiant,

$$(4) \qquad y' = \frac{c}{x'}.$$

Cette égalité prouve que y', nouvelle ordonnée de M par rapport aux axes $O'x'$ et $O'y'$, est une *fonction* de l'abscisse x' de la forme $\frac{c}{x'}$. Nous sommes donc ramenés au cas particulier étudié aux nos **312** à **314**.

La courbe représentative de la fonction $\frac{c}{x'}$ est, *par rapport aux nouveaux axes*, une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les nouveaux axes $O'x'$ et $O'y'$.

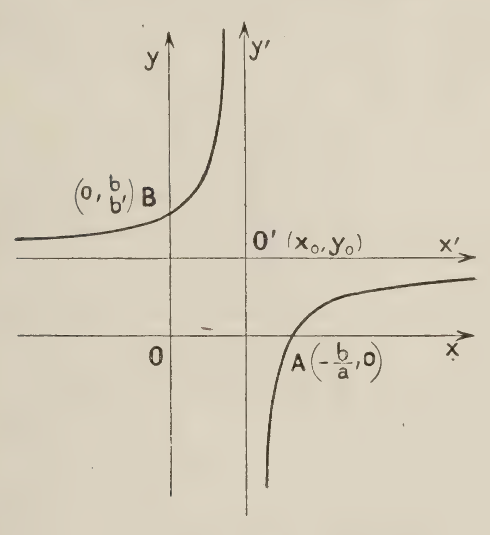


Fig. 45.

Si $c > 0$, elle est disposée comme dans la figure 44.

Si $c < 0$, elle est disposée comme dans la figure 45.

L'abscisse du point A où la courbe coupe Ox s'obtient

en cherchant la valeur de x, pour laquelle y est *nul*. C'est la valeur pour laquelle le numérateur de y est nul

$$x = -\frac{b}{a}.$$

L'ordonnée du point B où elle coupe Oy s'obtient en cherchant la valeur de y pour $x = 0$, c'est :

$$y = \frac{b}{b'}.$$

324. — Exemple. — *Considérons la fonction* $y = \dfrac{2x+3}{4x-1}$.

En suivant la marche indiquée au n° **318**, *mettons le dénominateur* $4x - 1$ *en évidence au numérateur*. Ce numérateur s'écrit :

$$2x + 3 = \frac{2}{4}(4x - 1) + \frac{2}{4} + 3 \quad \text{ou} \quad 2x + 3 = \frac{1}{2}(4x - 1) + \frac{7}{2}.$$

On peut donc écrire :

$$y = \frac{\frac{1}{2}(4x-1) + \frac{7}{2}}{4x - 1} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{4x - 1}.$$

Divisons les deux termes de la seconde fraction par 4 et nous avons finalement :

$$(1) \qquad y = \frac{1}{2} + \frac{\frac{7}{8}}{x - \frac{1}{4}}.$$

La variation est alors donnée par le tableau suivant :

x	$x - \frac{1}{4}$	$\dfrac{\frac{7}{8}}{x - \frac{1}{4}}$	y
$-\infty$	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$
croît	croît	décroît	décroît
		$-\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{4}$	0		
		$+\infty$	$+\infty$
croît	croît	décroît	décroît
$+\infty$	$+\infty$	0	$\frac{1}{2}$

Pour avoir la courbe représentative, faisons un changement de coordonnées et prenons (fig. 46) pour nouveaux axes $O'x'$ et $O'y'$ des axes

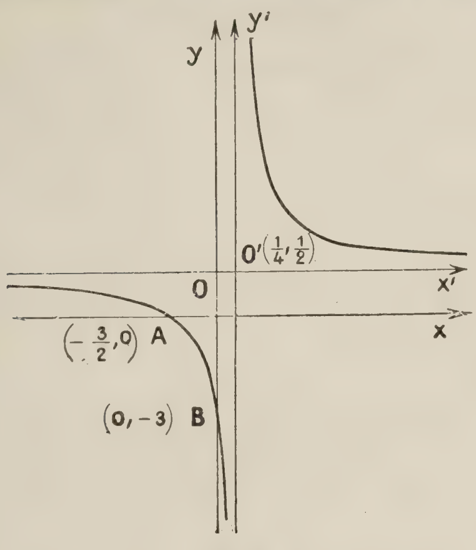


Fig. 46.

parallèles aux axes Ox, Oy, et tels que O' ait pour coordonnées :

$$x_0 = \frac{1}{4}, \quad y_0 = \frac{1}{2}.$$

Les formules de changement de coordonnées sont alors :

$$x = \frac{1}{4} + x', \quad y = \frac{1}{2} + y'.$$

En portant ces valeurs de x et y dans (1), nous obtenons :

$$y' = \frac{\frac{7}{8}}{x'}.$$

La courbe est donc une hyperbole équilatère qui a pour asymptotes $O'x'$ et $O'y'$.

Elle coupe Ox au point A d'abscisse $x = -\frac{3}{2}$ et Oy au point B d'ordonnée $y = -3$.

§ 3. — Cas où la variable est une ligne trigonométrique.

325. — Fonctions de fonctions. — On rencontre fréquemment, principalement dans les questions de géométrie où on étudie une fonction d'un *angle*, des exemples de fonctions d'une ligne trigonométrique. On a là un exemple particulier d'une *fonction de fonction*.

Ainsi la fonction

$$y = 2\sin^2 x + 4\sin x - 1$$

est un trinôme du second degré *en* $\sin x$; c'est une fonction de fonction, car c'est une fonction de $\sin x$ qui lui-même est une fonction de la variable indépendante x.

Pour étudier une telle fonction, on *superpose* l'étude des deux fonctions qui la forment.

Nous sommes donc ainsi conduits à revoir rapidement la variation des lignes trigonométriques déjà étudiée en trigonométrie[1].

326. — Variation du sinus. — Le sinus d'un arc est, comme l'on sait, une fonction *périodique* de l'arc, de *période* 2π ; c'est-à-dire que le sinus reprend la même valeur lorsque l'arc augmente de 2π. Il suffit donc de connaître la variation du sinus lorsque l'arc varie de 0 à 2π et cette variation se reproduira de 2π à 4π, de 4π à 6π, etc., ainsi que de -2π à 0, de -4π à -2π etc.,

Le tableau de la variation du sinus est alors le suivant :

x	$\sin x$
0	0
	croît
$\frac{\pi}{2}$	$+1$ (*max*)
	décroît
π	0
	décroît
$\frac{3\pi}{2}$	-1 (*min.*)
	croît
2π	0

1. Voir *Le Cours de Trigonométrie* de M. Henri Ferval.

La courbe représentative de $y = \sin x$, dite *sinusoïde* se compose d'une branche OABCD qui a d'abord un *maximum* A de coordonnées $\frac{\pi}{2}$, et 1; puis un *minimum* C de coordonnées $\frac{3\pi}{2}$ et -1.

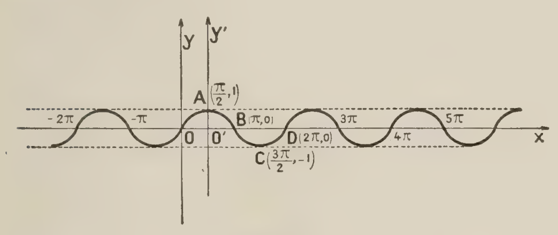


Fig. 47.

Cette branche se reproduit ensuite de telle sorte qu'on obtient la courbe entière en faisant glisser l'arc OABCD de 2π, 4π, 6π, etc., le long de ox à droite ou à gauche.

327. — Variation du cosinus. — La variation du cosinus se déduit immédiatement de celle du sinus en se servant de la formule bien connue :

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

La variation du cosinus quand x varie de 0 à 2π, est donc la même que celle du sinus lorsque x varie de $\frac{\pi}{2}$ à $2\pi + \frac{\pi}{2}$.

La courbe représentative est la même que celle du sinus où l'on a déplacé l'axe oy, parallèlement à lui-même, en $o'y'$ (fig. 47) de $+\frac{\pi}{2}$.

328. — Variation de la tangente. — La fonction

$$y = \operatorname{tg} x.$$

admet la période π, puisque

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x.$$

Il suffit donc de faire varier x dans un intervalle de longueur π pour avoir la variation complète de la tangente.

Or, lorsqu'on fait croître x de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ la tangente croît sans cesse de $-\infty$ à $+\infty$.

x	$\operatorname{tg}x$
$-\frac{\pi}{2}$	$-\infty$
	croît
0	0
	croît
$+\frac{\pi}{2}$	$+\infty$

La courbe représentative se compose d'une branche infinie AOB (fig. 48) asymptote à deux parallèles à oy d'abscisses $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Cette branche se reproduit périodiquement de $+\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$; de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{5\pi}{2}$ etc.

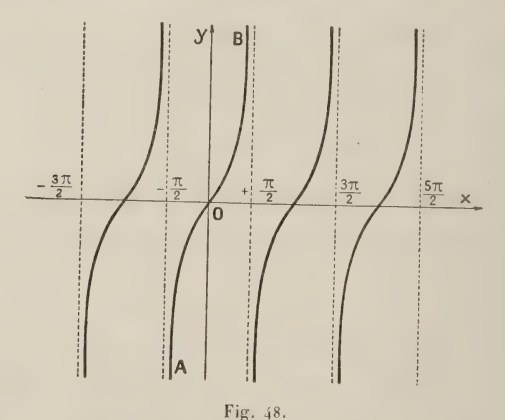


Fig. 48.

329. — Variation de $a \sin x + b$. — Considérons maintenant la fonction

(1) $$y = a \sin x + b.$$

C'est une fonction *linéaire* en $\sin x$. En rapprochant les résultats trouvés à la fois pour la fonction linéaire, (chap. V, § 4) et pour la variation du sinus (n° **326**) on en déduit immédiatement la variation de cette fonction de fonction.

1° Si $a > 0$, la fonction linéaire est *croissante* donc y varie dans le *même sens que le sinus.*

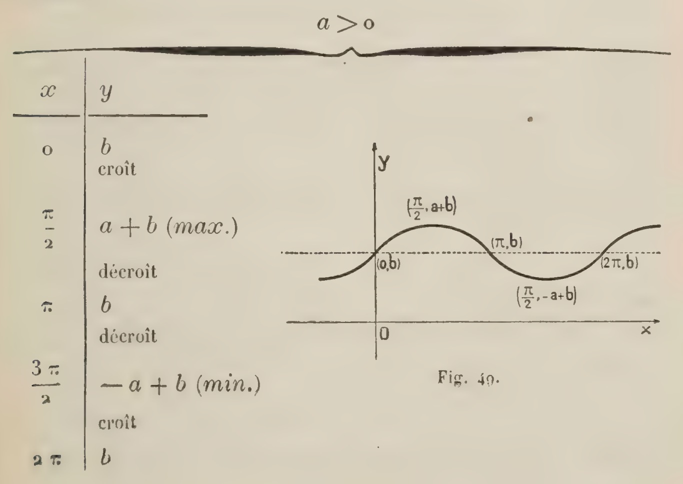
2° Si $a < 0$, la fonction linéaire est *décroissante* et, par suite, y varie en *sens inverse du sinus.*

La courbe représentative est très facile à construire. L'égalité (1) prouve, en effet, que pour avoir l'ordonnée y on doit multiplier $\sin x$ par a, c'est-à-dire multiplier l'ordonnée de la sinusoïde (fig. 47) par a, puis augmenter cette ordonnée de b. Cela revient donc à *dilater* la sinusoïde dans le rapport de a à 1 dans le sens oy puis à lui faire subir une translation parallèle à oy égale à b.

Lorsque a est négatif, il faut après dilatation dans le rapport de $|a|$ à 1, prendre la symétrie par rapport à ox.

On obtient dans les deux cas (fig. 49 et 50) deux sinusoïdes.

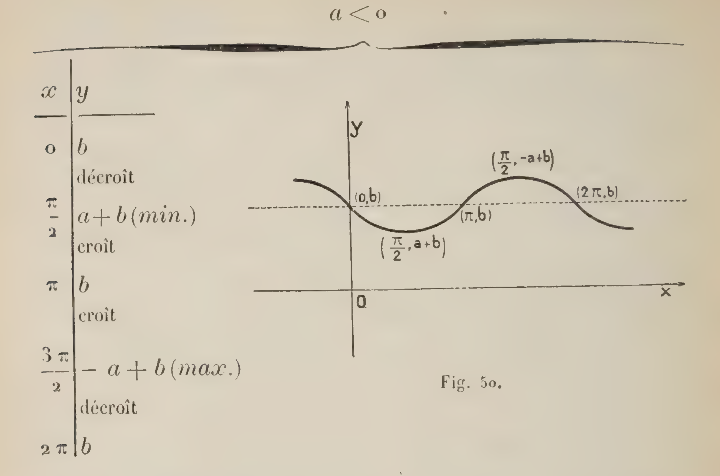
$a > 0$



x	y
0	b
	croît
$\frac{\pi}{2}$	$a + b$ (*max.*)
	décroît
π	b
	décroît
$\frac{3\pi}{2}$	$-a + b$ (*min.*)
	croît
2π	b

Fig. 49.

$a < 0$



x	y
0	b
	décroît
$\frac{\pi}{2}$	$a+b$ (*min.*)
	croît
π	b
	croît
$\frac{3\pi}{2}$	$-a+b$ (*max.*)
	décroît
2π	b

Fig. 50.

330. — Variation de $a \sin \omega x + b \cos \omega x$. — En mécanique, dans l'étude des mouvements vibratoires on rencontre fréquemment la fonction

$$(1) \qquad y = a \sin \omega x + b \cos \omega x,$$

qui donne l'écart y d'un point animé d'un mouvement vibratoire en fonction du temps x.

L'étude de cette fonction se ramène immédiatement à celle de la sinusoïde.

On peut, en effet, toujours trouver deux nombres α et φ, tels que l'on ait :

$$(2) \qquad \alpha \cos \varphi = a, \qquad \alpha \sin \varphi = b.$$

En faisant la somme des carrés de ces deux égalités on trouve

$$\alpha^2 = a^2 + b^2 \quad \text{d'où} \quad \alpha = \sqrt{a^2 + b^2};$$

et l'angle φ est alors déterminé à 2π près, puisqu'on con-

nait son cosinus et son sinus :

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ayant calculé α et φ, vérifiant les égalités (2), la formule (1) s'écrit :

$$y = \alpha[\sin\omega x \cos\varphi + \cos\omega x \sin\varphi],$$

(3) $$y = \alpha \sin(\omega x + \varphi).$$

Sous cette forme on voit que y est proportionnel au sinus de la fonction linéaire $\omega x + \varphi$.

D'après les résultats du n° **326**, le sens de la variation d'un sinus change lorsque l'on passe par les valeurs $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, etc.; par suite, le sens de la variation de y change lorsque x passe par des valeurs telles que

$$\omega x + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad , \quad x = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

$$\omega x + \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad , \quad x = \left(\frac{1}{\omega}\frac{3\pi}{2} - \varphi\right).$$

D'ailleurs y repassera par les mêmes valeurs chaque fois que $\omega x + \varphi$ augmentera de 2π. Pour cela il suffit que ωx augmente de 2π, ou x de $\frac{2\pi}{\omega}$. La fonction y admet donc la *période* $\frac{2\pi}{\omega}$ et on aura sa variation complète en faisant varier x de 0 à $\frac{2\pi}{\omega}$.

Supposons ω positif. D'ailleurs, nous pouvons toujours prendre pour α la valeur positive et pour φ une valeur comprise entre 0 et 2π. Pour fixer nos idées, admettons, par exemple que φ soit plus petit que $\frac{\pi}{2}$; on aura alors le tableau de variation suivant :

La courbe représentative est une sinusoïde *décalée* de $\frac{\varphi}{\omega}$, c'est-à-dire déduite de la sinusoïde qu'on aurait fait glisser le long de ox de $\frac{\varphi}{\omega}$.

x	$\omega x + \varphi$	y
0	φ	$\alpha \sin \varphi$
	croît	croît
$\frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$	$\frac{\pi}{2}$	α
	croît	décroît
$\frac{1}{\omega}\left(\pi - \varphi\right)$	π	0
	croît	décroît
$\frac{1}{\omega}\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\alpha$
	croît	croît
$\frac{1}{\omega}\left(2\pi - \varphi\right)$	2π	0
	cnoît	croît
$\frac{2\pi}{\omega}$	$2\pi + \varphi$	$\alpha \sin \varphi$

En effet, on peut écrire :

$$y = \alpha \sin \omega \left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

Si donc on fait le changement de coordonnées

$$x = x' - \frac{\varphi}{\omega},\ y = y',$$

ce qui revient à transporter (n° **303**) les axes au point O' de ox d'abscisse $-\frac{\varphi}{\omega}$, l'équation de la courbe devient :

$$y' = \alpha \sin \omega x';$$

c'est donc, par rapport aux nouveaux axes $o'x$, $o'y'$ (fig. 51) une sinusoïde.

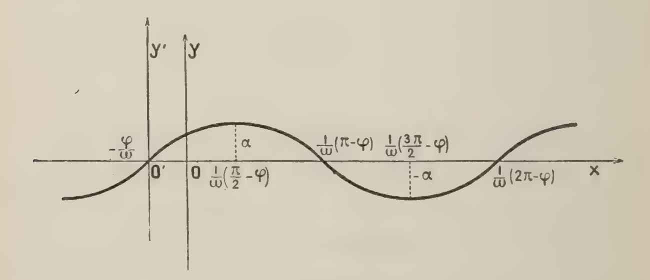


Fig. 51.

331. — Variation de $a \operatorname{tg} x + b$. — La variation de la fonction

$$y = a \operatorname{tg} x + b$$

se déduit d'une façon analogue de celle de $\operatorname{tg} x$. Lorsque x augmente de π, $\operatorname{tg} x$ reprend la même valeur, il en est donc de même de y. La fonction y est donc également périodique et admet pour période π. Il suffit, comme pour $\operatorname{tg} x$ (n° **328**), d'étudier la variation lorsque x varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Or, dans cet intervalle, $\operatorname{tg} x$ croît de $-\infty$ à $+\infty$, par suite :

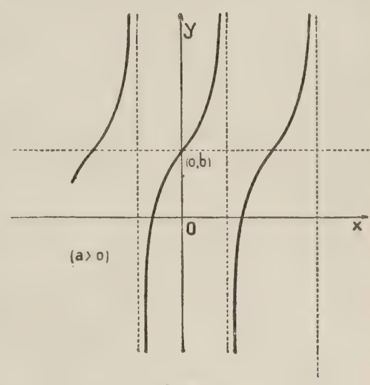


Fig. 52.

1° *Si* $a > 0$, y varie dans le même sens que $\operatorname{tg} x$ et croît de $-\infty$ à $+\infty$.

2° *Si* $a < 0$, y varie en sens contraire de $\operatorname{tg} x$ et décroît de $+\infty$ à $-\infty$.

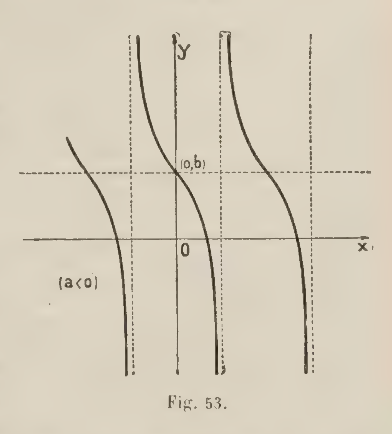


Fig. 53.

La courbe représentative (fig. 52) se déduit facilement de celle de $\operatorname{tg} x$ (fig. 48). On obtient, en effet, l'ordonnée y en multipliant $\operatorname{tg} x$ par a et ajoutant b. Il suffit donc de *dilater* la courbe de la figure 48 dans le sens *oy* dans le rapport de a à 1, puis de la transporter, parallèlement à *oy*, de la longueur b.

Lorsque a est négatif, la courbe est renversée par symétrie par rapport à ox.

On obtient ainsi les deux courbes des figures 52 et 53.

332. — Trinôme du second degré où la variable est une ligne trigonométrique. — Nous avons étudié (Ch. VII, § 1) la variation du trinôme du second degré. Si, dans un tel trinôme, on remplace x par une ligne trigonométrique, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, on obtient une fonction de fonction dont la variation se déduit de celle du trinôme en ne prenant que la partie relative aux intervalles dans lesquels peut varier la ligne.

Pour mieux nous faire comprendre, avant d'examiner le cas général, traitons un exemple numérique.

333. — Exemple. — *Étant donnés un cercle, un diamètre* AA' *et un point* M *du cercle, étudier la variation de l'excès de la corde* AM *sur sa projection* AP *sur le diamètre* AA' *quand* M *décrit le cercle.*

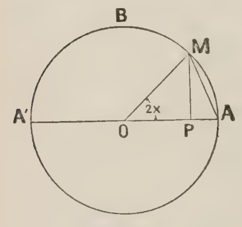


Fig. 54.

Prenons comme variable x la moitié de l'angle $\widehat{AOM}$, de telle sorte que (fig. 54).

$$\widehat{AOM} = 2x.$$

On a, alors :

$$AM = 2R \sin x,$$

R étant le rayon du cercle, et

$$PA = OA - OP = R - R\cos 2x = 2R\sin^2 x.$$

La différence en question y est donc :

$$(1) \qquad y = 2R\sin x - 2R\sin^2 x.$$

Pour étudier sa variation, il suffit évidemment, à cause de la symétrie, de faire décrire au point M le demi-cercle ABA', c'est-à-dire de faire varier $2x$ de 0 à π ou x

de o à $\frac{\pi}{2}$. Quand x croît de o à $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ croît de o à 1. Nous avons donc à étudier la variation de la fonction du second degré y lorsque la variable $\sin x$ varie *seulement* de o à 1. y est un trinôme du second degré en $\sin x$ de la forme :

$$y = a \sin^2 x + b \sin x + c$$

où $$a = -2\text{R}, \quad b = 2\text{R}, \quad c = 0.$$

Comme a est négatif, d'après les résultats trouvés précédemment (n° **302**) y passe par un *maximum* lorsque

$$\sin x = -\frac{b}{2a},$$

si c'est possible. Or ici le maximum aura lieu pour

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

d'où $$x = \frac{\pi}{6}.$$

On a donc la variation suivante :

x	$\sin x$	y
0	0	0
	croît	croît
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\text{R}}{2}$ (*max.*)
	croît	décroît
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Remarque. — A cause de l'origine géométrique de la question, nous n'avons fait varier x que de o à $\frac{\pi}{2}$; mais si on considère la fonction y en elle-même et que l'on fasse

varier x sans limites, on a là une fonction périodique de période 2π, dont la variation dans l'intervalle $0, 2\pi$ est réprésentée par le tableau suivant :

x	$\sin x$	y
0	0	0
	croît	croît
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{R}{2}\left(max.\right)$
	croît	décroît
$\frac{\pi}{2}$	1	0 (*min.*)
	décroît	croît
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{R}{2}\left(max.\right)$
	décroît	décroît
π	0	0
	décroît	décroît
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$-4R.$ (*min.*)
	croît	croît
2π	0	0

D'après les résultats connus sur le trinôme, y varie dans le même sens que $\sin x$ quand $\sin x$ est plus petit que $\frac{1}{2}$ et en sens contraire quand $\sin x$ est plus grand que $\frac{1}{2}$.

Le maximum $\frac{R}{2}$ est un maximum absolu atteint deux fois ; il y a en outre le minimum relatif 0 atteint pour $x = \frac{\pi}{2}$ et le minimum absolu $-4R$ atteint pour $x = \frac{3\pi}{2}$.

La courbe représentative est alors facile à construire (fig. 55).

334. — **Cas général**. — Considérons, d'une façon plus générale, la fonction :

$$y = a\sin^2 x + b\sin x + c.$$

Nous savons (n° **302**) qu'un trinome du second degré, lorsque a est positif, varie dans le même sens que la

variable si cette variable est plus grande que $-\frac{b}{2a}$ et varie en sens contraire de la variable si elle est plus petite

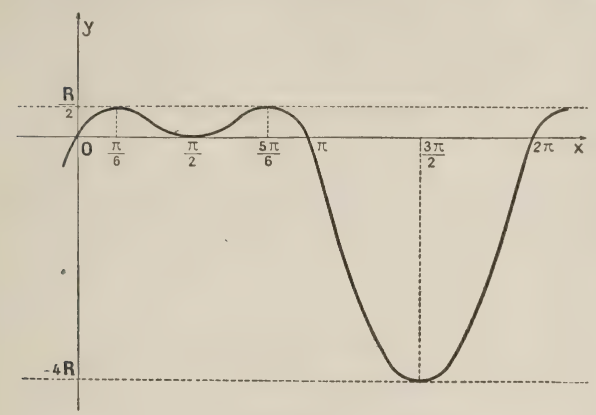


Fig. 55.

que $-\frac{b}{2a}\cdot$ Par suite, pour savoir si y varie ou non dans le même sens que le sinus, il suffit de voir si le sinus est plus grand ou non que $-\frac{b}{2a}\cdot$ Or, comme le sinus reste toujours compris entre -1 et $+1$, il y aura par suite trois cas.

1° *Si* $-\frac{b}{2a} > 1$, $\sin x$ restera toujours plus petit que $-\frac{b}{2a}$ et y variera toujours dans le sens *contraire* du sinus.

2° *Si* $-1 < -\frac{b}{2a} < 1$, il y aura changement dans le sens de la variation, non seulement chaque fois que $\sin x$ change de sens mais encore chaque fois que x passera par une valeur telle que

$$\sin x = -\frac{b}{2a};$$

C'est le cas de l'exemple précédent.

5° Si $-\frac{b}{2a} \leqslant -1$, $\sin x$ restera toujours plus grand que $-\frac{b}{2a}$ et y variera toujours dans le même sens que le sinus.

On obtiendrait évidemment des résultats analogues pour l'étude de la variation de fonctions de la forme :

$$y = a\cos^2 x + b\cos x + c$$

ou :

$$y = a\,\mathrm{tg}^2 x + b\,\mathrm{tg}\,x + c.$$

Dans ce dernier cas, la fonction y deviendrait infinie en même temps que la tangente.

EXERCICES

TRINÔME DU SECOND DEGRÉ.

477. Trouver le maximum ou le minimum de l'expression

$$y = (x-2)^2 + (2x-1)^2$$

Etudier la variation de y quand x varie.

478. Variations de l'expression

$$y = 3x^2 - 8x + 7$$

quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

479. Variation des fonctions

$$y = 3x^2 - 5x + 4\,;\; y = 8x - 5x^2 + 2$$

quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

480. Variation du trinôme

$$y = 5x^2 - 12x + 16.$$

481. Déterminer les coefficients du trinôme $ax^2 + bx + c$ sachant que $x = 3$ est une racine et que pour $x = 2$ le trinôme est minimum et égal à -3. Étudier les variations du trinôme obtenu.

482. Déterminer p et q dans le trinôme du 2e degré

$$x^2 + px + q$$

de manière que la valeur minima du trinôme soit égale à a et que ce trinôme prenne pour $x = \frac{1}{2}$ la valeur $b + \frac{1}{4}$; a et b désignent des nombres donnés.

483. Étudier les variations de l'expression

$$y = 7 - (2x + 3)^2$$

quand x varie de $-\infty$ à $+\infty$.

484. On donne une droite AB et deux points A et B sur cette droite En ces points on élève à la droite les perpendiculaires AA′ et BB′. On prend un point O sur AB, entre A et B et on fait tourner autour de ce point O un angle droit MOP dont les côtés coupent AA′ en M et BB′ en P. On demande d'étudier la variation du rapport $\frac{\text{AM}}{\text{BP}}$.

485. Sur une droite AB de longueur a on prend, entre A et B, un point M tel que $\text{AM} = x$. On construit sur AM le triangle équilatéral AMN, puis on élève en N la perpendiculaire NP sur MN et en P la perpendiculaire BP sur AB. Calculer la surface du quadrilatère ANPB. Cette surface passe-t-elle par un maximum ou par un minimum quand M se déplace entre A et B?

486. Étant donnée une droite AB de longueur a, on prend sur AB entre A et B un point C, et sur les deux segments AC et CB on construit un triangle équilatéral. Étudier la variation de la somme des aires de ces deux triangles quand le point C se déplace de A en B. Position du point C pour laquelle cette somme est minima.

487. — Un point M se meut entre deux points A et B. On construit sur AM un triangle équilatéral ACM et sur MB un triangle rectangle isocèle MDB. On joint CD et l'on demande d'étudier les variations de l'aire du quadrilatère ACDB quand le point M se déplace de A à B. Cette aire a-t-elle un maximum ou un minimum?

FONCTION $\dfrac{ax + b}{a'x + b'}$

488. Variations de $y = \dfrac{1}{2x - 3}$. Construire la courbe représentative.

489. Construire la courbe des variations de la fonction

$$y = \frac{5x}{x - 5}.$$

490. Étudier la variation de la somme de deux nombres dont le produit est constant et égal à a^2.

491. On sait que si p est la pression d'une masse gazeuse, v son volume et t sa température on a :

$$\frac{pv}{1 + \frac{t}{273}} = C$$

on sait que la masse gazeuse à 0^0 occupe un volume de 15 centimètres cubes sous la pression de 1 kilogramme.

Construire les courbes représentatives de la variation du volume en fonction de la pression aux températures de 50°, 100° et 400°. On posera

$$x = p,\ y = v.$$

FONCTIONS DE LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

492. Étudier les variations des fonctions suivantes, linéaires par rapport à une ligne trigonométrique :

$$a)\qquad y = 2\cos x - 1\,;$$
$$b)\qquad y = \cos x + \sin x\,;$$
$$c)\qquad y = \sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} + 1\,;$$
$$d)\qquad y = 2\cot x + 1.$$

493. Étudier les variations des fonctions suivantes, du second degré par rapport à une ligne trigonométrique :

$$a)\qquad y = \sin^2 x - 3\sin x + 1\,;$$
$$b)\qquad y = 2\cos^2 x + 7\cos x\,;$$
$$c)\qquad y = \sin^2 x + \cos x + 3\,;$$
$$d)\qquad y = 2\,\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x - 1.$$

494. Étant donné un cercle de centre O et de diamètre AA′, soit M un point de ce cercle et P sa projection sur AA′.

Étudier, lorsque le point M décrit le cercle, les variations des fonctions suivantes de l'angle $x = \dfrac{\widehat{\mathrm{AOM}}}{2}$:

$$a)\qquad y = \mathrm{AM} + 2\,\mathrm{AP}.\,;$$
$$b)\qquad y = \mathrm{A'P} - \mathrm{AM}\,;$$
$$c)\qquad y = \overline{\mathrm{AM}}^2 + 2\,\overline{\mathrm{OP}}.\,\overline{\mathrm{A'A}};$$
$$d)\qquad y = \alpha\,\mathrm{AM} + \beta\,\mathrm{OP},$$

α et β étant deux nombres donnés fixes.

CHAPITRE VIII

DÉRIVÉES — APPLICATIONS

§ 1. — Définitions.

335. — Accroissements. — *Lorsqu'une quantité variable passe d'une valeur* a, *appelée* **valeur initiale,** *à une seconde valeur* b, *appelée* **valeur finale**, *on appelle* **accroissement** *de cette quantité l'excès* b — a *de la valeur finale sur la valeur initiale.*

Ainsi, si une variable x prend successivement les deux valeurs $x=1$, $x=3$, la valeur *initiale* étant 1 et la valeur *finale* 3, l'*accroissement* est $3-1=2$.

L'accroissement est positif, négatif ou nul, suivant que la valeur finale est supérieure, inférieure ou égale à la valeur initiale. De la définition précédente il résulte que :

La valeur finale est égale à la valeur initiale augmentée de l'accroissement.

Si l'on désigne par h l'accroissement $b-a$, on a :

$$b-a=h \quad \text{ou} \quad b=a+h.$$

336. — Notation. — Pour désigner l'accroissement d'une quantité, on fait généralement précéder la lettre qui désigne cette quantité de la lettre grecque Δ (delta).

Ainsi Δx désigne l'*accroissement de* x, Δy désigne l'*accroissement* de y.

Il faut bien faire attention que le symbole Δx désigne *un seul* nombre, que ce n'est pas le produit de Δ par x. Les deux lettres Δ et x font corps et leur ensemble joue le rôle d'une seule lettre.

337. — Accroissement d'une fonction. — Considérons une fonction y d'une variable x.

Supposons que

pour $x=a$, on ait $y=A$;
et que pour $x=b$, on ait $y=B$.

En passant de la valeur initiale a à la valeur finale b, x a subi un accroissement

$$\Delta x = b - a.$$

De son côté, la fonction y a passé de la valeur A à la valeur B, et a subi l'accroissement

$$\Delta y = B - A.$$

L'accroissement B — A est ce qu'on appelle l'*accroissement de la fonction* **correspondant** *à l'accroissement* b — a *de la variable.*

Soit, par exemple, la fonction

$$y = 2x - 3.$$

Pour $x = 1$ on a : $y = -1$,
pour $x = 4$ on a : $y = 5$.

La variable x a subi l'accroissement :

$$\Delta x = 4 - 1 = 3.$$

La fonction a subi l'accroissement *correspondant* :

$$\Delta y = 5 - (-1) = 6.$$

Soit encore la fonction

$$y = x^2 + x + 1.$$

Pour $x = -2$, on a : $y = 3$,
pour $x = -1$, on a : $y = 1$.

La variable ayant subi l'accroissement :

$$\Delta x = -1 - (-2) = +1,$$

la fonction a subi l'accroissement *correspondant* :

$$\Delta y = 1 - 3 = -2.$$

338. — Limites. — Chacun de nous a la notion vulgaire de la *limite* d'une quantité variable.

Si l'on veut préciser un peu, au point de vue mathéma-

tique, cette notion, on peut dire : qu'une quantité variable y a pour *limite* un nombre b, ou encore *tend vers* b, si elle peut devenir aussi voisine qu'on le voudra du nombre b, si la différence $y - b$ peut devenir, en valeur absolue, aussi petite qu'on le voudra.

Par exemple, si l'on considère la fonction

$$y = 3 - 2x,$$

cette fonction y a pour *limite* 3 lorsque x tend vers *zéro*. La différence $y - 3$ est, en effet, en valeur absolue égale à la valeur absolue de $2x$; elle peut donc devenir aussi petite qu'on le voudra pour des valeurs assez petites de x. Ainsi elle sera plus petite que $\frac{1}{1000}$ si x est plus petit que $\frac{1}{2000}$ (en valeur absolue), elle sera plus petite que $\frac{1}{1\,000\,000}$ si x est plus petit que $\frac{1}{2\,000\,000}$, etc.

Voici encore d'autres exemples, déjà rencontrés :

Une fraction dont le dénominateur croît indéfiniment *tend vers zéro*. Ainsi la fraction

$$y = \frac{1}{x}$$

tend vers *zéro* quand x croît indéfiniment, car

pour $x = 100$, $y = 0{,}01$;
pour $x = 1\,000$, $y = 0{,}001$;
pour $x = 1\,000\,000$, $y = 0{,}000\,001$;

et ainsi de suite.

On peut prendre la valeur de x assez grande pour que y soit aussi voisin de *zéro* qu'on le voudra.

En arithmétique, on apprend que quand on ajoute un même nombre aux deux termes d'une fraction, cette fraction se rapproche de *l'unité*. Quand le nombre que l'on ajoute *croît indéfiniment*, la fraction *tend vers* 1.

Ainsi, considérons la fraction $\frac{2}{3}$, ajoutons un même nombre positif x aux deux termes : la nouvelle fraction

$$y = \frac{2 + x}{3 + x}$$

croît avec x et *tend vers* 1 quand x croît indéfiniment. Il suffit, pour le voir, d'opérer comme nous l'avons fait au paragraphe qui précède.

On écrit :

$$y = \frac{3 + x - 1}{3 + x} = 1 - \frac{1}{3 + x}.$$

Quand x croît, $\frac{1}{3+x}$ décroît, donc la partie soustractive de y diminue et y croît. Quand x croît indéfiniment, $\frac{1}{3+x}$ tend vers *zéro*, donc y tend vers 1, puisque la différence $1 - y$ égale à $\frac{1}{3+x}$ devient aussi petite qu'on le veut.

Nous admettrons, pour le moment, sans démonstration que :

Si plusieurs quantités variables ont des limites, leur somme ou leur produit a une limite qui est la somme ou le produit de ces limites.

Nous admettrons aussi que :

Si deux quantités variables ont des limites, leur quotient a une limite qui est le quotient des limites, pourvu que la limite du dénominateur soit différente de zéro.

Lorsque le dénominateur d'une fraction tend vers *zéro*, et que le numérateur *reste différent de zéro*, la fraction *croît indéfiniment*. Nous en avons eu plusieurs exemples au cours de cet ouvrage.

339. — Définition de la dérivée d'une fonction. — Considérons une fonction y d'une variable x. Supposons qu'on donne à la variable x un accroissement Δx, *il en résultera* pour la fonction y un accroissement *correspondant* Δy.

Formons le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et faisons tendre Δx vers *zéro*. Si ce quotient a une *limite*, lorsque Δx tend vers *zéro*, cette limite est ce qu'on appelle la *dérivée* de la fonction y.

Par suite :

On appelle* dérivée *d'une fonction la limite du rapport de l'accroissement de cette fonction à l'accroissement corres-

pondant de la variable lorsque l'accroissement de la variable tend vers zéro.

340. — Remarque importante. — Il résulte de la définition qui précède que, pour calculer la dérivée d'une fonction y de la variable x :

1° On donnera à x un accroissement;

2° On calculera l'accroissement *correspondant* de y;

3° On divisera l'accroissement de y par celui de x;

4° On cherchera la limite de ce quotient.

On est donc toujours amené à chercher la limite d'un quotient dont le dénominateur *tend vers zéro*. Pour que cette limite puisse exister, il faut que le numérateur tende aussi vers zéro, car sans cela (n° **338**) la fraction croîtrait indéfiniment.

Si on laissait la fraction sous la forme sous laquelle on l'obtient, *sans la simplifier*, on n'obtiendrait *aucun résultat*, car les deux termes de la fraction tendant *tous deux vers zéro*, on obtiendrait $\frac{0}{0}$, *ce qui n'a aucun sens.*

Donc,

Avant de chercher la limite du quotient, il faut toujours avoir soin de le simplifier.

341. — Notation. — Pour désigner la dérivée d'une fonction, on affecte la lettre qui désigne cette fonction d'un *accent*.

Ainsi la dérivée de y se désigne par y' (ce qui se lit *y prime*); la dérivée de $f(x)$ se désigne par $f'(x)$.

On emploie encore une autre notation, appelée *notation différentielle*, qui consiste à représenter la dérivée de y par $\frac{dy}{dx}$.

Pour l'instant, l'élève devra considérer l'expression $\frac{dy}{dx}$ comme une simple *notation*, et ne pas y voir, à proprement parler, un quotient.

Cependant cette notation, dans les applications *pratiques*, pourra être considérée comme un quotient, et voici comment :

La dérivée est la *limite* du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsque Δx et Δy tendent *tous deux* vers zéro. Lorsque Δx et Δy. sont *très petits*, le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est une valeur *approchée* de la dérivée y, d'autant plus approchée que les accroissements sont plus petits.

Dans les applications *pratiques*, en physique par exemple, on peut prendre comme valeur de la dérivée y' cette valeur *approchée*; dans ce cas, on peut alors considérer que $\frac{dy}{dx}$ est un quotient de deux valeurs dx et dy *très petites* des accroissements Δx et Δy. C'est pour cette raison que souvent en physique, pour abréger le langage, on désigne par dx et dy les accroissements de x et y *supposés très petits*, et alors la dérivée est égale *très approximativement* à ce quotient $\frac{dy}{dx}$.

342. — Premiers exemples numériques. — Pour calculer la dérivée d'une fonction y de x on aura soin de suivre la marche indiquée au n° **340.**

Il sera encore bon de faire attention aux remarques suivantes :

Si on donne à la variable x un accroissement $\Delta x = h$, la valeur *finale* de la variable (n° **335**) est $x + h$. La valeur *initiale* de la fonction y est celle qui correspond à la valeur *initiale* x de la variable ; sa valeur *finale* sera celle qui correspond à la valeur *finale* $x + h$ de la variable.

On remplacera donc x par $x + h$ dans l'expression de y pour avoir sa valeur finale.

On aura ensuite l'accroissement de y en prenant l'excès de sa valeur finale sur sa valeur initiale.

On divisera cet accroissement par h et on aura soin de *simplifier* le quotient obtenu.

EXEMPLE I. — *Soit à calculer la dérivée de la fonction :*

$$y = 2x + 3.$$

Donnons à x un accroissement :

$$\Delta x = h.$$

La valeur finale de x est $x + h$.
La valeur finale de y est donc :

$$2(x + h) + 3.$$

L'accroissement de y est l'excès de la valeur finale sur la valeur initiale :

$$\Delta y = 2(x + h) + 3 - (2x + 3),$$

ou, en simplifiant :

$$\Delta y = 2h.$$

On a par suite :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2h}{h}.$$

En simplifiant, il vient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2.$$

Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ étant toujours égal à 2, sa limite est aussi égale à 2, donc :

$$y' = 2, \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = 2.$$

EXEMPLE II. — *Soit à calculer la dérivée de la fonction :*

$$y = 2x^2 + 5x - 3.$$

Donnons à x un accroissement :

$$\Delta x = h.$$

La valeur finale de x est $x + h$.
La valeur finale de la fonction est :

$$2(x + h)^2 + 5(x + h) - 3.$$

L'accroissement de y est donc (excès de la valeur finale sur la valeur initiale) :

$$\Delta y = 2(x + h)^2 + 5(x + h) - 3 - (2x^2 + 5x - 3),$$

ou :

$$\Delta y = 2x^2 + 4hx + 2h^2 + 5x + 5h - 3 - 2x^2 - 5x + 3,$$

ou encore en simplifiant :

$$\Delta y = 4hx + 2h^2 + 5h.$$

On a par suite :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4hx + 2h^2 + 5h}{h},$$

ou :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4hx}{h} + \frac{2h^2}{h} + \frac{5h}{h}.$$

En *simplifiant*, il vient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x + 2h + 5.$$

Pour avoir la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand l'accroissement h tend vers zéro, il suffit de remplacer *maintenant* h par sa valeur limite *zéro*. On a donc :

$$y' = 4x + 5.$$

Exemple III. — *Soit à calculer la dérivée de la fonction* :

$$y = \frac{2x - 3}{x + 5}.$$

Donnons à x un accroissement :

$$\Delta x = h.$$

La valeur finale de la variable est $x + h$; celle de la fonction est :

$$\frac{2(x + h) - 3}{x + h + 5} = \frac{2x + 2h - 3}{x + h + 5}.$$

L'accroissement de y est donc :

$$\Delta y = \frac{2x + 2h - 3}{x + h + 5} - \frac{2x - 3}{x + 5},$$

ou :

$$\Delta y = \frac{(2x + 2h - 3)(x + 5) - (2x - 3)(x + h + 5)}{(x + h + 5)(x + 5)},$$

ou encore :

$$\Delta y = \frac{2x^2 + 2hx - 3x + 10x + 10h - 15 - 2x^2 - 2hx - 10x + 3x + 3h + 15}{(x + h + 5)(x + 5)}$$

En simplifiant, il vient :

$$\Delta y = \frac{13h}{(x+h+5)(x+5)}.$$

On en conclut :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13h}{h(x+h+5)(x+5)}.$$

Simplifions la fraction en divisant les deux termes par h, et il vient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13}{(x+h+5)(x+5)},$$

Faisons *maintenant* $h=0$ et nous obtenons la dérivée :

$$y' = \frac{13}{(x+5)^2}.$$

343. — Dérivée d'une constante. — ***La dérivée d'une constante est nulle.***

Si, en effet, une fonction y est *constante*, c'est-à-dire conserve toujours la même valeur, sa valeur finale sera *égale* à sa valeur initiale, son accroissement sera *nul.*

Donc $\Delta y = 0.$

Par suite, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$

quel que soit Δx. Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ étant toujours égal à zéro, sa limite sera *zéro*; et on a bien

$$y' = 0.$$

344. — Dérivée de la fonction linéaire — ***La dérivée de la fonction $ax+b$ est a.***

Soit, en effet, la fonction

$$y = ax + b.$$

Donnons à la variable l'accroissement

$$\Delta x = h.$$

La valeur finale de cette variable sera $x+h$.

La valeur finale de la fonction sera :

$$a(x+h)+b=ax+ah+b.$$

L'accroissement de y sera donc (excès de la valeur finale de la valeur initiale) :

$$\Delta y=ax+ah+b-(ax+b)$$

ou

$$\Delta y=ah.$$

Par suite, on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{ah}{h}=a.$$

Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ étant toujours égal à a, sa limite est égale à a et on a bien :

$$y'=a \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx}=a.$$

Exemples. — *Appliquons ceci aux fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} &y=x, && y'=1,\\ &y=2x+5, && y'=2,\\ &y=\frac{x}{2}-3, && y'=\frac{1}{2},\\ &y=6-3x, && y'=-3. \end{aligned}$$

345. — Dérivée du trinôme du second degré. — ***La dérivée du trinôme*** ax^2+bx+c ***est*** $2ax+b$.

Considérons la fonction

$$y=ax^2+bx+c.$$

Donnons à la variable x un accroissement

$$\Delta x=h.$$

L'accroissement correspondant de la fonction sera

$$\Delta y=a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c)$$

ou, en développant et simplifiant,

$$\Delta y=2ahx+ah^2+bh,$$

On a donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ahx + ah^2 + bh}{h} = 2ax + ah + b.$$

Lorsque h tend vers zéro, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a manifestement pour limite $2ax + b$.

Par suite,

$$y' = 2ax + b,$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b.$$

Exemples. — *Appliquons ceci aux exemples numériques suivants :*

$$y = x^2 + 1, \qquad y' = 2x;$$
$$y = 3x^2 - 5x, \qquad y' = 6x - 5;$$
$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + 3, \qquad y' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4};$$
$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 6, \qquad y' = x + 3.$$

346. — Dérivée de $\frac{ax + b}{a'x + b'}$. — ***La dérivée de la fraction $\frac{ax + b}{a'x + b'}$, est $\frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}$.***

Soit

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}.$$

En donnant à la variable x l'accroissement

$$\Delta x = h$$

la fonction y prend la valeur finale $\frac{a(x + h) + b}{a'(x + h) + b'}$ et son accroissement correspondant est :

$$\Delta y = \frac{ax + ah + b}{a'x + a'h + b'} - \frac{ax + b}{a'x + b'}.$$

En réduisant au même dénominateur et simplifiant le numérateur, on trouve :

$$\Delta y = \frac{ab'h - a'bh}{(a'x + a'h + b')(a'x + b')}.$$

On en déduit :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ab' - ba'}{(a'x + a'h + b')(a'x + b')},$$

car le numérateur de Δy est divisible par h.

Lorsque l'accroissement h de x tend vers zéro, le premier facteur du dénominateur devient égal au second et, par suite, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a pour limite $\frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}$.

On a donc bien :

$$y' = \frac{ab' - ba'}{(a'x + b')^2}.$$

Exemples. — *Voici quelques applications numériques :*

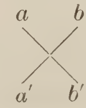
$$y = \frac{1}{x}, \qquad y' = \frac{-1}{x^2};$$

$$y = \frac{1}{x-3}, \qquad y' = \frac{-1}{(x-3)^2};$$

$$y = \frac{2x+1}{x}, \qquad y' = \frac{-1}{x^2};$$

$$y = \frac{4x-3}{x+1}, \qquad y' = \frac{7}{(x+1)^2}.$$

347. — Remarque. — Pour faciliter le calcul de la dérivée de $\frac{ax+b}{a'x+b'}$, on peut se servir du moyen mnémonique que voici : les quatre coefficients a, b, a', b', étant disposés comme ils le sont dans la fraction



il suffit, pour avoir le numérateur, *de faire la différence des produits en croix.*

§ 2. — Application du calcul de la dérivée à l'étude de la variation d'une fonction.

348. — Interprétation géométrique de la dérivée. — Théorème. — *Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe représentative de la variation d'une fonction est, en chaque point, égal à la valeur correspondante de la dérivée de la fonction.*

Rappelons d'abord la définition géométrique de la tangente en un point d'une courbe.

Soit C (fig. 56), une courbe, et M, un point de cette

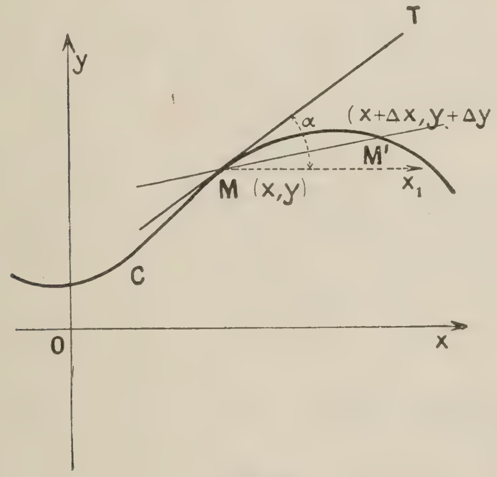


Fig. 56.

courbe. Prenons sur la courbe un second point M′, voisin du point M, et traçons la droite MM′. Si, lorsque le point M′ se rapproche indéfiniment de M en restant sur la courbe C et vient se confondre avec M, la droite MM′ tend vers une position limite MT, c'est cette position limite qu'on appelle la *tangente* à la courbe C au point M.

Le point M est alors ce qu'on appelle le *point de contact* de la tangente MT.

Ceci posé, considérons une fonction y d'une variable x et imaginons qu'on ait tracé (fig. 56) la courbe C représentative de la variation de cette fonction.

Soit M un point de cette courbe d'abscisse x et d'ordonnée y. Donnons à x un accroissement Δx, la fonction y subira un accroissement correspondant Δy et les valeurs *finales* de la variable et de la fonction seront respectivement $x+\Delta x$, $y+\Delta y$.

Soit M′ le point de la courbe de coordonnées $x+\Delta x$, $y+\Delta y$. Traçons la droite MM′ et cherchons d'abord son coefficient angulaire.

Si nous désignons par a le coefficient angulaire de MM′ et par b l'ordonnée à l'origine de cette droite (nos **236** à **239**), l'équation de cette droite sera :

$$y = ax + b. \qquad (1)$$

D'autre part, comme le point M′ est situé sur cette droite, ses coordonnées vérifient également l'équation (1), et nous aurons :

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$$

ou :

$$y + \Delta y = ax + a\Delta x + b. \qquad (2)$$

Retranchons, membres à membres, les égalités (1) et (2) et il vient :

$$\Delta y = a\Delta x.$$

On en tire :

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad (3)$$

formule qui donne la valeur a du coefficient angulaire de la droite MM′.

Ceci posé, supposons que le point M′ se rapproche indéfiniment de M et vienne se confondre avec lui. Les

accroissements Δx et Δy tendront tous deux vers zéro et le rapport $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ aura pour limite la *dérivée* y' de la fonction y. Or, puisque MM′ a pour limite la tangente MT en M, le coefficient angulaire a de MM′ aura pour limite le coefficient angulaire de la tangente MT. La limite de a, qui est y', est donc le coefficient angulaire de la tangente MT. C'est ce que nous voulions démontrer.

349. — Remarque. — Nous avons vu (nº **237**) que le coefficient angulaire d'une droite est égal à la *tangente trigonométrique* de l'angle que fait cette droite avec la partie positive de l'axe Ox.

Si donc on désigne par α l'angle $\widehat{x_1 \mathrm{MT}}$ (fig. 56) que fait la tangente à la courbe en M avec l'axe Ox, on a l'égalité

$$\operatorname{tang} \alpha = y'.$$

350. — **Croissance.** — **Théorème.** — ***Lorsqu'une fonction est croissante, sa dérivée n'est pas négative.***

Soit y, une fonction *croissante* de la variable x. Ceci veut dire (nº **209**) que y et x varient *dans le même sens.*

Donnons à x un accroissement Δx et soit Δy l'accroissement correspondant de y. Dire que x et y varient dans le même sens, c'est dire que x et y augmentent ou diminuent en même temps.

Si, en passant de la valeur initiale x à la valeur finale $x + \Delta x$, la variable augmente, Δx est *positif*; mais alors la fonction, passant de la valeur y à la valeur $y + \Delta y$, doit aussi augmenter, et Δy doit être *positif.*

Si, au contraire, la variable a diminué, Δx est *négatif*; il doit en être de même de la fonction et Δy doit être également *négatif.*

En d'autres termes, lorsque la fonction est croissante, Δx et Δy sont *de même signe.*

Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est donc toujours positif; et, par suite,

sa limite, lorsque Δx tend vers zéro, qui est la dérivée y', ne saurait être négative.

La dérivée d'une fonction croissante est en général positive.

Cette dérivée pourrait être parfois nulle, car un nombre positif peut avoir pour limite zéro.

En aucun cas, cette dérivée n'est négative.

Exemple. — Nous avons vu (n° **213**) que la fonction

$$y = 4x - 3$$

est *croissante*. Sa dérivée (n° **344**)

$$y' = 4$$

est bien *positive*.

351. — Décroissance. — Théorème. — ***Lorsqu'une fonction est décroissante, sa dérivée n'est pas positive.***

Soit y une fonction *décroissante* de la variable x. Ceci veut dire (n° **210**) que y et x varient *en sens inverse*.

Donnons à x un accroissement Δx et soit Δy l'accroissement correspondant de y.

Si, en passant de la valeur initiale x à la valeur finale $x + \Delta x$, la variable a augmenté, Δx est *positif*; mais alors, la fonction, passant de la valeur y à la valeur $y + \Delta y$, doit au contraire diminuer, et Δy doit être *négatif*.

Si la variable diminue, Δx est *négatif*. La fonction doit alors, au contraire, augmenter, et Δy doit être *positif*.

En d'autres termes, lorsque la fonction est décroissante, Δx et Δy sont de signes contraires.

Le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est donc toujours *négatif*, et, par suite, sa limite, lorsque Δx tend vers zéro, qui est la dérivée y', ne peut pas être positive.

La dérivée d'une fonction décroissante est en général négative.

Cette dérivée peut être nulle, car un nombre négatif peut avoir pour limite zéro.

En aucun cas cette dérivée n'est positive.

EXEMPLE. — Nous avons vu (nº **214**) que la fonction

$$y = 7 - 2x$$

est *décroissante*. Sa dérivée

$$y' = -2$$

est bien *négative*.

352. — Maxima et minima. — Considérons une fonction y de la variable x et faisons croître x de $-\infty$ à $+\infty$; il peut arriver que la fonction varie sans cesse dans le même sens, aille sans cesse en croissant ou sans cesse en décroissant.

C'est ce qui a lieu par exemple pour la fonction linéaire $ax + b$. Nous avons vu, en effet (nºs **212** à **214**), qu'elle est croissante lorsque a est positif et qu'elle est décroissante lorsque a est négatif.

Mais il peut aussi se faire que la fonction x ne varie pas sans cesse dans le même sens. Il peut arriver que pour une certaine valeur de x le sens de la variation change.

C'est ce qui a lieu pour le trinôme du second degré; car nous avons vu (nº **302**) que pour $x = -\frac{b}{2a}$ le sens de sa variation change.

Par exemple (nº **302**), le trinôme $x^2 + 3x - 5$ *décroît* d'abord lorsque x croît de $-\infty$ à $-\frac{3}{2}$; puis pour $x = -\frac{3}{2}$ le sens de sa variation change et le trinôme *croît* ensuite lorsque x croît de $-\frac{3}{2}$ à $+\infty$.

***Lorsque pour une certaine valeur de la variable une fonction cesse de croître pour décroître, on dit que la fonction passe par un* maximum.**

***Lorsqu'au contraire, pour une certaine valeur de la variable, la fonction cesse de décroître pour croître, on dit que la fonction passe par un* minimum.**

Ainsi la fonction $x^2 + 3x - 5$ cesse, pour $x = -\frac{3}{2}$, de décroître pour croître. Elle passe donc par un *minimum* pour $x = -\frac{3}{2}$ et la valeur de ce minimum est la valeur $-\frac{29}{4}$ de la fonction pour $x = -\frac{3}{2}$.

353. — Interprétation géométrique. — Les résultats trouvés aux numéros **350** et **351** s'interprètent géométriquement au moyen de l'application du théorème du n° **348**.

Traçons (fig. 57) la courbe représentative d'une fonction. Lorsque la fonction *croît*, sa dérivée est positive et la courbe *monte*. Soit M un point d'une portion montante de

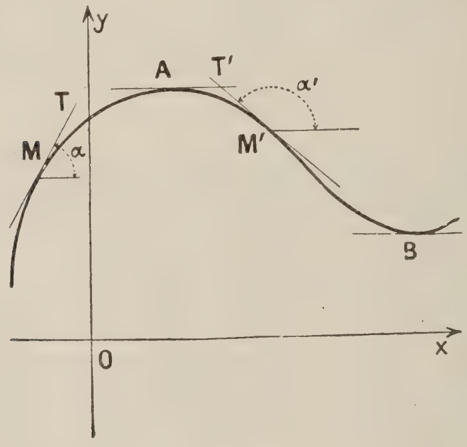


Fig. 57.

la courbe. Nous avons vu (n° **349**) que la dérivée est en ce point égale à tang α, α étant l'angle de la tangente MT à la courbe avec Ox. Or, puisque la courbe monte, l'angle α est *aigu*, sa tangente trigonométrique est donc positive. C'est ce qui exprime bien que la dérivée est positive.

Lorsqu'au contraire la fonction *décroît*, la courbe *descend*. En un point M' de la portion descendante (fig. 57), l'angle α' de la tangente M'T' à la courbe avec l'axe Ox est *obtus*. La tangente trigonométrique, tang α', de cet angle qui est égale à la dérivée en ce point est donc *négative*.

Ainsi la formule

$$\text{tang}\,\alpha = y'$$

montre bien que :

lorsque la fonction *croît*,

$$\alpha \text{ est } aigu, \quad \operatorname{tang} \alpha = y' > 0;$$

lorsque la fonction *décroît*,

$$\alpha \text{ est } obtus, \quad \operatorname{tang} \alpha = y' < 0.$$

En un point où la fonction est *maxima*, comme le point A (fig. 57), la tangente à la courbe est parallèle à Ox, l'angle α est *nul*; donc *la dérivée est nulle.*

De même en un *minimum*, tel que B, la tangente est également parallèle à Ox et la dérivée est aussi nulle.

Donc : *lorsque la fonction passe par un maximum ou un minimum, la dérivée s'annule en changeant de signe.*

354. — Intervalle. — On dit que x *est compris dans l'intervalle* (a, b) lorsque x est compris entre a et b.

Ainsi dire que x est compris dans l'intervalle $(-3, +2)$, c'est dire que l'on a :

$$-3 < x < +2.$$

Dire que x est compris dans l'intervalle $(-\infty, a)$ c'est dire que x est plus petit que a.

Dire que x est compris dans l'intervalle $(a, +\infty)$ c'est dire que x est plus grand que a.

355. — Réciproques. — ***Lorsque la dérivée d'une fonction est positive pour toutes les valeurs de la variable comprises dans un intervalle, cette fonction est croissante dans cet intervalle.***

Lorsque la dérivée d'une fonction est négative pour toutes les valeurs de la variable comprises dans un intervalle, cette fonction est décroissante dans cet intervalle.

Ces réciproques se déduisent des théorèmes des nos **350** et **351** par un raisonnement par l'absurde.

Supposons, en effet que pour toutes les valeurs de x comprises dans une intervalle (a, b), a étant plus petit que b, la dérivée y' d'une fonction y de x soit *positive.*

Faisons croître x de a à b. Si la fonction ne variait pas, restait constante, soit dans tout l'intervalle où seulement

dans une partie, la dérivée y' serait *nulle* tant que y serait constante (n° **343**).

La fonction doit donc varier sans cesse.

Or, elle ne peut pas décroître, car si elle décroissait, ne fût-ce que dans une partie de l'intervalle, sa dérivée ne pourrait pas être constamment positive, car (n^{os} **351**) elle ne serait pas positive tant que y décroîtrait.

La fonction variant et ne pouvant jamais décroître, *croît* sans cesse lorsque x croît de a à b.

On ferait une démonstration analogue dans le cas où la dérivée y' serait négative pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b.

Remarque. — Géométriquement, ces réciproques sont évidentes. Si, en effet, la dérivée y' est positive, c'est que l'angle α de la tangente à la courbe avec Ox est constamment aigu. Par suite, la courbe *monte* et la fonction croît.

Si la dérivée est négative l'angle α (alpha) est obtus, la courbe *descend* et la fonction décroît.

356. — Application à l'étude de la variation d'une fonction. — De ce qui précède, il résulte que la connaissance du *signe* de la dérivée suffit pour connaître le sens de la variation d'une fonction.

Pour étudier la variation d'une fonction, on suivra alors la marche que voici :

1° Si la fonction a un dénominateur, on calculera la ou les valeurs de x qui annulent ce dénominateur.

Pour ces valeurs, la fonction devient infiniment grande. On dit qu'il y a une *discontinuité* de la fonction.

2° On calcule la dérivée.

3° On cherche les valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule.

4° On range par ordre de grandeur croissante les valeurs de x pour lesquelles la fonction est infinie, et celles pour lesquelles la dérivée s'annule.

5° On a ainsi formé une suite d'intervalles allant de $-\infty$ à $+\infty$ dans chacun desquels la fonction n'est pas infinie et la dérivée conserve un signe constant.

On cherche alors le signe de la dérivée dans chacun de ces intervalles. Ce signe indique le sens de la variation de la fonction.

Appliquons ceci aux exemples déjà traités.

357. — Fonction linéaire. — Soit la fonction

$$y = ax + b.$$

On a (n° **344**) :

$$y' = a.$$

Si $a > 0$, la fonction est sans cesse *croissante*.

Si $a < 0$, la fonction est sans cesse *décroissante*.

358. — Trinôme du second degré. — Considérons le trinôme :

$$y = ax^2 + bx + c$$

on a (n° **345**).

$$y' = 2ax + b.$$

Cette dérivée s'annule pour $x = -\frac{b}{2a}$.

1° Si $a > 0$, l'inégalité

$$2ax + b > 0.$$

est vérifiée pour $x > -\frac{b}{2a}$.

Donc quand $x < -\frac{b}{2a}$, $y' < 0$, y décroît;

et quand $x > -\frac{b}{2a}$, $y' > 0$, y croît.

On retrouve les résultats connus (n° **302**), la fonction est *minima* pour $x = -\frac{b}{2a}$.

2° Si $a < 0$, l'inégalité

$$2ax + b > 0$$

est vérifiée pour $x < -\frac{b}{2a}$.

Donc, quand $x < -\frac{b}{2a}$, $y' > 0$, y croît;

et quand $x > -\frac{b}{2a}$, $y' < 0$, y décroît.

La fonction y est *maxima* pour $x = -\frac{b}{2a}$.

359. — Fonction $\frac{ax+b}{a'x+b'}$. — Soit la fonction

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}.$$

Cette fonction devient infiniment grande pour la valeur $x = -\frac{b'}{a'}$, qui annule le dénominateur.

Sa dérivée est (nº **346**) :

$$y' = \frac{ab' - ba'}{(a'x+b')^2}.$$

Comme le dénominateur est toujours positif, on voit que la dérivée conserve toujours un signe constant. La fonction varie toujours dans le même sens. Si $ab' - ba' > 0$, elle est *croissante*; si $ab' - ba' < 0$, elle est *décroissante*. Pour faire un tableau de sa variation, cherchons encore sa valeur quand x croît indéfiniment; pour cela, divisons les deux termes de la fraction par x. On a ainsi :

$$y = \frac{a + \frac{b}{x}}{a' + \frac{b'}{x}}.$$

Lorsque x croît indéfiniment les deux fractions $\frac{b}{x}$ et $\frac{b'}{x}$ tendent toutes deux vers zéro. La fraction a donc pour limite :

$$\frac{a+0}{a'+0} = \frac{a}{a'}.$$

Nous avons alors les tableaux de variations suivants :

$ab' - ba' > 0$

x	y'	y
$-\infty$		$\frac{a}{a'}$
	$+$	croît
$-\frac{b'}{a'}$		$+\infty$ / $-\infty$
	$+$	croît
$+\infty$		$\frac{a}{a'}$

$ab' - ba' < 0$

x	y'	y
$-\infty$		$\frac{a}{a'}$
	$-$	décroît
$-\frac{b'}{a'}$		$-\infty$ / $+\infty$
	$-$	décroît
$+\infty$		$\frac{a}{a'}$

REMARQUE. — Dans le cas où $ab' - ba' = 0$ on trouve que y' est toujours *nulle*. Il est donc à prévoir que la fonction y est constante. En effet, l'égalité

$$ab' - ba' = 0$$

s'écrit

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'};$$

appelons k la valeur commune des rapports

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k;$$

on en tire :

$$a = ka' \quad , \quad b = kb'.$$

Par suite

$$y = \frac{ka'x + kb'}{a'x + b'} = \frac{k(a'x + b')}{a'x + b'}.$$

On voit que les deux termes de y sont divisibles par $a'x + b'$. La fraction se simplifie et il vient :

$$y = k.$$

La fonction y est donc toujours égale à k.

360. — Exercice I. — *Étudier la variation d'un produit de deux facteurs dont la somme est constante et égale à a.*

Soit x l'un des deux facteurs. L'autre sera égal à $a-x$. Leur produit est donc :

$$y=x(a-x),$$

ou

$$y=ax-x^2.$$

Calculons la dérivée de cette fonction y. C'est (n° **345**) :

$$y'=a-2x.$$

Cette dérivée s'annule pour $x=\frac{a}{2}$; elle est positive lorsque $x<\frac{a}{2}$ et négative lorsque $x>\frac{a}{2}$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	y'	y
$-\infty$		$-\infty$
	$+$	croît
$\frac{a}{2}$	0	$\frac{a^2}{4}$ (*max.*)
	$-$	décroît
$+\infty$		$-\infty$

Pour $x=\frac{a}{2}$ la fonction est *maxima* et la valeur du *maximum* est :

$$y=\frac{a}{2}\left(a-\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}.$$

On peut remarquer que lorsque $x=\frac{a}{2}$, on a aussi $a-x=\frac{a}{2}$. Donc la fonction y est maxima lorsque les deux facteurs du produit sont égaux.

Ce résultat s'exprime ainsi :

Un produit de deux facteurs dont la somme est constante, est maximum lorsque ces deux facteurs sont égaux.

On peut construire la courbe représentative de la fonction y. Pour faire le tracé avec plus de précision, on

remarque que y s'annule pour $x = 0$ et $x = a$. Ceci montre que la courbe passe à l'origine O des coordonnées (fig. 58) et coupe en outre Ox au point A d'abscisse a. Le point M

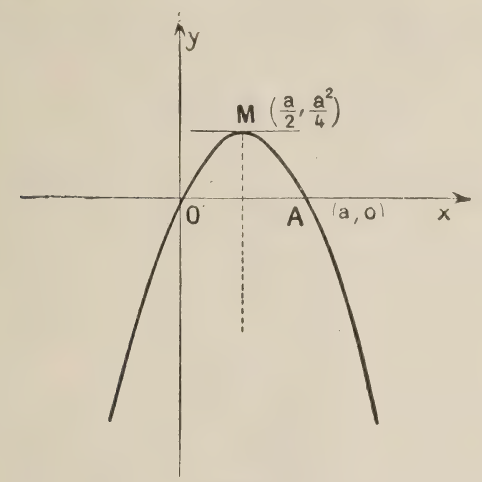


Fig. 58.

le plus haut où la tangente est parallèle à Ox, correspond au maximum $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a^2}{4}$.

361. — Exercice II. — ***Étudier la variation de la fonction :***

$$y = x^3 - 3x + 1.$$

Calculons d'abord la dérivée.

Donnons à x un accroissement

$$\Delta x = h.$$

Il en résulte pour y un accroissement

$$\Delta y = (x+h)^3 - 3(x+h) + 1 - (x^3 - 3x + 1).$$

Or, on a, en effectuant les calculs :

$$(x+h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$$

on en conclut :

$$\Delta y = 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - 3h,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 - 3h,}{h}$$

et enfin

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3hx + h^2 - 3.$$

Faisons maintenant tendre h vers zéro et il vient :

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Cette dérivée s'annule pour

$$x^2 = 1$$

ou

$$x = \pm 1.$$

Lorsque x est compris entre -1 et $+1$, y' est négative. Lorsque x est plus grand que 1 ou plus petit que -1, y' est positive.

On a alors le tableau ci-contre.

Pour $x = -1$, y cesse de croître pour décroître et passe par un *maximum* 3.

x	y'	y
$-\infty$		$-\infty$
	$+$	croît
-1	0	3 (*max.*)
	$-$	décroît
$+1$	0	-1 (*min.*)
	$+$	croît
$+\infty$		$+\infty$

Pour $x = +1$, y cesse de décroître pour croître, la fonction passe par un *minimum* égal à -1.

La construction de la courbe ne présente aucune difficulté.

Lorsque x croît de $-\infty$ à -1, on a une branche de courbe montante DA (fig. 59) jusqu'au point A correspondant au maximum. x croissant de -1 à $+1$, la courbe redescend de A en B au minimum. Elle coupe l'axe Oy au point C d'ordonnée 1 ; car pour $x = 0$, on a $y = 1$.

Enfin, x croissant de 1 à $+\infty$, on a une branche de courbe montante BE.

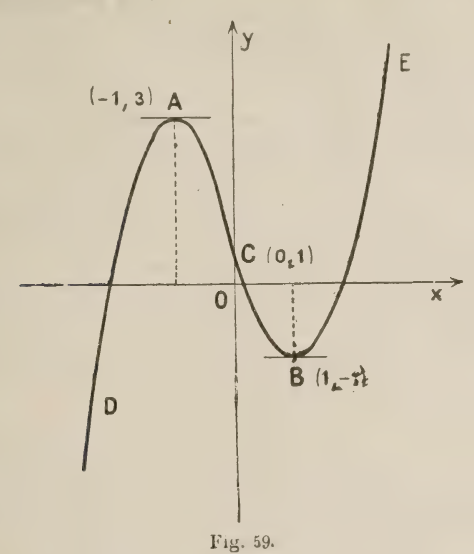


Fig. 59.

Remarque. — La courbe coupe Ox en trois points. Ceci prouve qu'il y a trois valeurs de x pour lesquelles y prend la valeur zéro;

C'est-à-dire qu'il y a trois valeurs de x pour lesquelles on a :

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Cette équation a donc trois racines qui sont les abscisses de ces trois points.

§ 3. — Théorèmes généraux sur les dérivées.

362. — Résumé. — Nous avons, dans ce qui précède, calculé les dérivées des fonctions les plus simples en appliquant, à chacune de ces fonctions, la définition même de la dérivée. Or, il existe des règles générales qui

permettent d'éviter ces longs calculs. Ce sont quelques-unes de ces règles que nous allons donner.

Mais, auparavant, nous rappellerons deux résultats importants trouvés plus haut et dont nous aurons fréquemment besoin :

La dérivée d'une constante est nulle (*n°* **343**).

La dérivée de x *est* 1 (*n°* **344**).

363. — Dérivée d'une somme. — *La dérivée d'une somme de plusieurs fonctions d'une même variable est égale à la somme des dérivées de ces fonctions.*

Cet énoncé suppose évidemment que chacune des fonctions admet une dérivée.

Soient u, v, w plusieurs fonctions d'une même variable indépendante x, leur somme

$$y = u + v + w$$

est évidemment une fonction de la même variable x.

Supposons que l'on donne à x un accroissement Δx, *il en résultera* pour u, v et w des accroissements *correspondants* (n° **337**) Δu, Δv et Δw.

Ceci revient à dire que les valeurs *initiales* des fonctions, pour la valeur x de la variable, étant u, v, w, les valeurs *finales*, pour la valeur $x + \Delta x$ de la variable, sont $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$.

La valeur initiale de la somme y est la somme $u + v + w$ des valeurs initiales ; la valeur finale de y est la somme $u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w$ des valeurs finales.

L'accroissement de y est donc :

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w - (u + v + w),$$

qui est l'excès de la valeur finale sur la valeur initiale. En simplifiant, il vient :

$$(1) \qquad \Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w.$$

Pour avoir la dérivée de y il faut, par définition (n° **339**),

chercher la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lorsque Δx tend vers zéro. Or, on a, d'après l'égalité (1),

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Lorsque Δx tend vers zéro, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta w}{\Delta x}$ tendent respectivement vers des limites u', v' et w' qui sont les dérivées de u, v et w.

Par suite, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, qui est leur somme, tend vers une limite qui est la somme de ces limites $u' + v' + w'$. La dérivée y' de la fonction y est donc bien :

$$y' = u' + v' + w',$$

c'est-à-dire la *somme des dérivées.*

364. — Dérivée d'un produit. — ***La dérivée d'un produit de plusieurs fonctions d'une même variable est égale à la somme des produits obtenus en remplaçant successivement dans le produit considéré chacun des facteurs par sa dérivée.***

1° *Cas de deux facteurs.* — Soient u et v deux fonctions d'une même variable x. Leur produit

$$y = uv$$

est évidemment une fonction de la même variable.

Supposons que l'on donne à la variable x un accroissement Δx, *il en résultera* pour les fonctions u et v des accroissements *correspondants* Δu et Δv; de telle sorte que les valeurs *initiales* des deux facteurs étant u et v, leurs valeurs *finales* sont $u + \Delta u$ et $v + \Delta v$.

La valeur initiale du produit sera le produit uv des valeurs initiales; et sa valeur finale sera le produit $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$ des valeurs finales.

L'accroissement du produit y est donc l'excès de la valeur finale sur la valeur initiale, ou :

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv.$$

En développant le second membre, il vient :

$$\Delta y = uv + v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - uv$$

ou

(1) $$\Delta y = v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Pour avoir la dérivée de y, formons le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, en divisant les deux membres de l'égalité (1) par Δx, et nous obtenons :

(2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Lorsque Δx tend vers zéro, les quotients $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent respectivement vers les dérivées u' et v' des fonctions u et v. D'ailleurs l'accroissement Δu tend vers *zéro* (car sans cela $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ n'aurait pas de limite et croîtrait indéfiniment, ce que nous ne supposons pas). Il en résulte que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite y' obtenue en remplaçant dans le second membre de l'égalité (2) les diverses quantités par leurs limites (n° **338**) ce qui donne :

$$y' = vu' + uv' + o \cdot v',$$

ou finalement

$$y' = vu' + uv'.$$

Or, $vu' + uv'$ est bien la somme des deux produits obtenus en remplaçant successivement dans uv les deux facteurs u et v par leurs dérivées u' et v'.

2° *Cas général.* — La proposition étant vraie pour deux facteurs s'étend aisément, de proche en proche, aux cas de 3, 4, plusieurs facteurs.

Prenons d'abord trois facteurs :

$$y = uvw.$$

On peut considérer y comme le produit de deux facteurs uv et w, on a donc, d'après le cas précédent :

$$(3) \qquad y' = (uv)' \cdot w + (uv) w'.$$

Or, toujours d'après ce qui précède,

$$(uv)' = u'v + uv'$$

donc, en remplaçant dans l'égalité (3), il vient :

$$y' = (u'v + uv') w + uvw'$$

ou

$$(4) \qquad y' = u'vw + uv'w + uvw',$$

ce qu'il fallait démontrer.

Examinons encore le cas de quatre facteurs :

$$y = uvws$$

où u, v, w, s désignent quatre fonctions de x. Nous pouvons regarder y comme un produit de deux facteurs uvw et s. On a alors, d'après le premier cas,

$$(5) \qquad y' = (uvw)'s + (uvw)s'.$$

Or, l'égalité (4) donne la valeur de $(uvw)'$, et, en la remplaçant dans (5), il vient :

$$y' = (u'vw + uv'w + uvw') s + uvws'$$

ou

$$y' = u'vws + uv'ws + uvw's + uvws'.$$

Ce qui est bien la somme des produits obtenus en remplaçant successivement dans le produit $uvws$, les facteurs u, v, w et s par leurs dérivées u', v', w' et s'.

365. Dérivée d'une puissance. — ***La dérivée d'une puissance s'obtient en la multipliant par son exposant, diminuant cet exposant d'une unité et multipliant le tout par la dérivée de la fonction élevée à cette puissance.***

Prenons d'abord un cas particulier.

Soit u une fonction de la variable x et

$$y = u^3$$

sa troisième puissance. Par définition de la puissance, y est le produit de trois facteurs égaux à u :

$$y = u \cdot u \cdot u.$$

On aura donc la dérivée en appliquant la règle du n° **364** ce qui donne :

$$y' = u'uu + uu'u + uuu'.$$

Dans le second membre chacune des parties de la somme est un produit de 2 facteurs égaux à u et un facteur u', chacune de ces parties est donc égale à u^2u', et on a :

$$y' = u^2u' + u^2u' + u^2u'$$

ou

$$y' = 3u^2 u'.$$

Plus généralement, soit

$$y = u^m,$$

m désignant un nombre entier positif.

y est le produit de m facteurs égaux à u et s'écrit

$$y = \overbrace{u\,u\,u \ldots uu}^{m \text{ facteurs}}.$$

On obtient donc sa dérivée en appliquant la règle du n° **364**, ce qui donne :

$$y' = u'uu \ldots uu + uu'u \ldots uu + \ldots + uuu \ldots uu'.$$

Le second membre est une somme de m produits. Chaque produit comprend $m-1$ facteur égaux à u et un facteur u'. Chacun de ces produits est donc égal à $u^{m-1}u'$, de sorte que l'on a :

$$y' = \underbrace{u^{m-1}u' + u^{m-1}u' + \ldots + u^{m-1}u'}_{m \text{ termes}}$$

ou

$$y' = mu^{m-1} \cdot u'$$

366. Dérivée de x^m. — ***La dérivée de x^m est mx^{m-1}.***

Il suffit, pour le prouver, d'appliquer la règle précédente au cas particulier où

$$u = x.$$

On a alors :

$$u' = 1.$$

La dérivée de x^m est donc :

$$mx^{m-1} \cdot (x)' = mx^{m-1} \cdot 1 = mx^{m-1}.$$

367. Dérivée du produit d'une fonction par une constante. — ***La dérivée du produit d'une fonction par une constante est égale au produit de la dérivée de cette fonction par la constante.***

Cela résulte immédiatement de l'application de la règle du n° **364** et du fait que la dérivée d'une constante est *zéro*.

En effet, si l'on a :

$$y = au,$$

a étant une constante et u une fonction de x, on en déduit (n° **364**) ;

$$y' = au' + 0 . u = au',$$

puisque la dérivée de a est 0.

368. Dérivée de ax^m. — ***La dérivée de ax^m est max^{m-1}. Elle s'obtient en multipliant l'expression par l'exposant de x et diminuant ensuite cet exposant d'une unité.***

En effet, la dérivée de x^m est (n° **366**) mx^{m-1}, la dérivée de ax^m, où a désigne une constante, est égale à la dérivée de x^m multipliée par a et, par suite, à max^{m-1}.

Exemples. — La dérivée de

$$5x^3 \text{ est } 3 \times 5x^2 = 15x^2.$$

En appliquant la règle précédente on a :

$$y = 3x^7 \quad \text{d'où} \quad y' = 21x^6,$$

$$y = \frac{2}{3}x^6 \quad \text{d'où} \quad y' = 4x^5,$$

$$y = -2x^4 \quad \text{d'où} \quad y' = -8x^3,$$

$$y = -\frac{1}{5}x^3 \quad \text{d'où} \quad y' = -\frac{3}{5}x^2.$$

369. Dérivée d'un polynôme entier. — ***La dérivée d'un polynôme entier est la somme des dérivées de chacun de ses termes.***

Ceci résulte de la règle du n° **363**.

Les dérivées des divers termes du polynôme s'obtiennent en appliquant la règle du n° **368** et celle du terme constant est nulle.

Exemples. — En appliquant ce qui précède on retrouve les dérivées trouvées précédemment :

$$y = ax + b \quad , \quad y' = a \quad ;$$
$$y = ax^2 + bx + c \quad , \quad y' = 2ax + b.$$

On a encore :

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x + 6 \quad , \quad y' = 3x^2 + 4x - 5 \quad ;$$
$$y = x^3 + px + q \quad , \quad y' = 3x^2 + p \quad ;$$
$$y = 2x^4 - 5x^2 + 7x - 3 \quad , \quad y' = 8x^3 - 10x + 7 \quad ;$$
$$y = x^5 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{7}x - 1 \quad , \quad y' = 5x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{7}.$$

370. — Dérivée d'un quotient. — ***La dérivée d'un quotient est une fraction ayant : 1° pour numérateur l'excès du produit de la dérivée du numérateur de la fraction par son dénominateur sur le produit de la dérivée du dénominateur par le numérateur ; 2° pour dénominateur, le carré du dénominateur de la fraction proposée.***

Soient u et v deux fonctions d'une même variable x, et soit leur quotient

$$y = \frac{u}{v}.$$

Donnons à x un accroissement Δx; il en résultera pour les fonctions u et v des accroissements correspondants Δu et Δv, de telle sorte que les valeurs finales de u et v seront $u + \Delta u$ et $v + \Delta v$.

La valeur initiale de y étant $\frac{u}{v}$, sa valeur finale sera le quotient $\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$ des valeurs finales des deux termes.

Son accroissement sera donc (excès de la valeur finale sur la valeur initiale) :

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v},$$

ou, en simplifiant,

$$\Delta y = \frac{(u + \Delta u)v - (v + \Delta v)u}{v(v + \Delta v)} = \frac{v.\Delta u - u.\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Pour obtenir le quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, divisons le numérateur par Δx et il vient :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Lorsque Δx tend vers zéro, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ et $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent respectivement vers les dérivées u' et v' des fonctions u et v. Le numérateur de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a donc pour limite $vu' - uv'$. D'autre part, Δv tend vers zéro (puisque $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ ne croît pas indéfiniment), par suite le dénominateur a pour limite $v.v$ ou v^2. La limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, qui est la dérivée de y, est donc :

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

371. — Applications. — La règle précédente permet de calculer rapidement les dérivées de toutes les fractions *rationnelles*, c'est-à-dire des fractions dont les deux termes sont des polynômes entiers, puisque (nº **369**) l'on sait calculer la dérivée d'un polynôme.

Exemples. — Soit : $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$.

La dérivée de $ax+b$ est a, celle de $a'x+b'$ est a'. Donc ;

$$y'=\frac{(a'x+b')a-(ax+b)a'}{(a'x+b')^2}=\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}.$$

On retrouve, plus simplement, un résultat connu.

Soit encore :

$$y=\frac{x^2-5x+6}{x+3},$$

on a :

$$y'=\frac{(x+3)(2x-5)-(x^2-5x+6)\times 1}{(x+3)^2},$$

ou, en simplifiant :

$$y'=\frac{x^2+6x-21}{(x+3)^2}.$$

Soit, enfin :

$$y=\frac{x^3+1}{2x^2+7x-3}.$$

On a :

$$y'=\frac{(2x^2+7x-3)3x^2-(x^3+1)(4x+7)}{(2x^2+7x-3)^2},$$

ou :

$$y'=\frac{2x^4+14x^3-9x^2-4x-7}{(2x^2+7x-3)^2}.$$

372. — Exercice. — *Étudier la variation de la fonction*

$$y=\frac{3x-2}{x^2-3x+2}.$$

Appliquons la marche à suivre indiquée au n° **356**.

1° Le dénominateur de y s'annule pour les valeurs de x racines de l'équation

$$x^2-3x+2=0$$

Ces racines sont 1 et 2. Pour ces valeurs, y est *infinie.* Ce sont les valeurs de discontinuité.

2° Calculons la dérivée :

$$y'=\frac{3(x^2-3x+2)-(3x-2)(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2}$$

ou, en simplifiant,

$$y'=\frac{-3x^2+4x}{(x^2-3x+2)^2}.$$

3° La dérivée s'annule et change de signe pour $x = 0$ et $x = \frac{4}{3}$.

4° Les valeurs remarquables de x rangées par ordre de grandeur croissante sont :

$$0, \quad 1, \quad \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad 2.$$

5° Nous formons ainsi le tableau suivant :

Lorsque x est plus petit que zéro la dérivée est négative, la fonction décroît.

Quant x est compris entre 0 et $\frac{4}{3}$ la dérivée est positive la fonction croît; mais pour $x = 1$ elle devient infinie. Elle croît donc du minimum -1 qu'elle a atteint pour $x = 0$, jusqu'à $+\infty$; saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$ et croît jusqu'à la valeur -9 qu'elle atteint pour $x = \frac{4}{3}$.

x	y'	y
$-\infty$		0
	$-$	décroît
0	0	-1 (*min.*)
	$+$	croît
		$+\infty$
1		
		$-\infty$
	$+$	croît
$\frac{4}{3}$	0	-9 (*max.*)
	$-$	décroît
		$-\infty$
2		
		$+\infty$
	$-$	décroît
$+\infty$		0

Lorsque x croît de $\frac{4}{3}$ à $+\infty$, la dérivée est négative et la fonction décroît; mais pour $x = 2$ elle devient encore infinie en passant brusquement de $-\infty$ à $+\infty$.

Il reste à déterminer la valeur de y lorsque x est infini.

A cet effet, faisons *ce qu'il faut toujours faire en pareil cas* et divisons les deux termes de la fraction y *par la plus haute puissance de x qui y figure* (ici c'est x^2) et nous obtiendrons :

$$y = \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Lorsque x croît indéfiniment $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers *zéro*, le numérateur de y tend vers zéro, le dénominateur tend vers 1, y a donc pour limite $\frac{0}{1} = 0$.

La courbe représentative (fig. 60) est facile à construire.

Lorsque x est très grand en valeur absolue et négatif y, est, très voisin de *zéro* et négatif; on a un point A très éloigné à gauche au-dessous de ox et voisin de ox. x croissant de $-\infty$ à 0, y décroît de 0 à -1; la branche de courbe AB descend au minimum B (fig. 60).

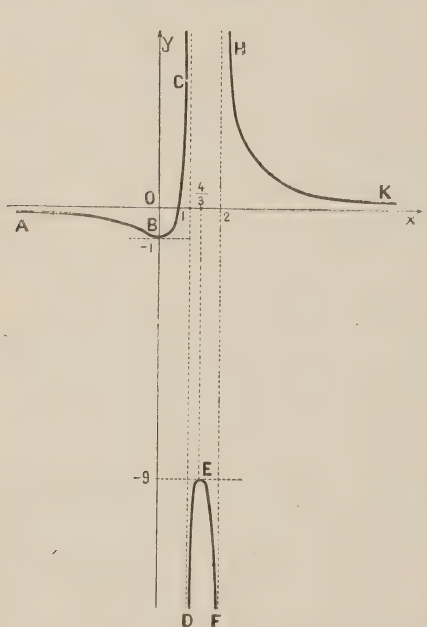


Fig. 60.

Quand x croît de 0 à 1, y croît de -1 à $+\infty$; en d'autres termes, lorsque x tend vers 1 par valeurs plus petites, y croît sans limite par valeurs positives; on a une branche de courbe infinie BC qui remonte du minimum B pour devenir asymptote à la droite $x = 1$.

Dès que x a dépassé la valeur 1, y devient négatif. Pour une valeur de x un peu plus grande que 1 on a un point D très éloigné dans le bas, puisque $y = -\infty$.

x croissant de 1 à $\frac{4}{3}$, y croît de $-\infty$ à 9 pour revenir à $-\infty$

pour $x = 2$. On a donc une branche de courbe DEF qui remonte au maximum E pour redescendre à l'infini asymptote à la droite $x = 2$.

Enfin, lorsque x dépasse la valeur 2, y devient infiniment grand et positif et tend vers *zéro* lorsque x croît indéfiniment. On a donc finalement une branche de courbe descendante HK asymptote à $x = 2$ et asymptote à ox au-dessus.

373. — Dérivées d'ordre supérieur au premier. — La dérivée y' d'une fonction y de la variable x est, en général elle-même, une fonction de x qui admet une dérivée. Cette dérivée de la dérivée est ce qu'on appelle la ***dérivée seconde***.

La dérivée seconde à son tour admet une dérivée qu'on appelle la ***dérivée troisième***, et ainsi de suite.

Plus généralement :

On appelle* dérivée m*ième* *d'une fonction la fonction obtenue en prenant la dérivée de la fonction proposée, puis la dérivée de cette dérivée, et ainsi de suite m fois.

On désigne la dérivée $m^{ième}$ d'une fonction y en affectant y de m accents.

Ainsi y'' (qui se lit *y seconde*) est la dérivée seconde de y.

y''' (qui se lit *y tierce*) désigne la dérivée troisième de y.

y' est la dérivée *première*.

Exemples. — *Voici quelques exemples de calculs de dérivées successives :*

1° Soit d'abord la fonction :

$$y = x^3 + 2x^2 - 3,$$

ses dérivées sont :

$$y' = 3x^2 + 4x,$$
$$y'' = 6x + 4,$$
$$y''' = 6,$$
$$y'''' = 0.$$

2° Soit la fonction :

$$y = \frac{1}{x - 1}.$$

on a :

$$y' = \frac{-1}{(x - 1)^2},$$

$$y'' = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3};$$
$$y''' = \frac{-2\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-6}{(x-1)^4};$$
$$y'''' = \frac{6\cdot 4(x-1)^3}{(x-1)^8} = \frac{24}{(x-1)^5};$$

etc.

374. — Théorème. — ***Lorsque la dérivée d'une fonction est constamment nulle, cette fonction est constante.***

Nous savons (n° **343**) que la dérivée d'une constante est nulle. C'est la *réciproque* de cette proposition qu'il s'agit d'établir.

Or cette réciproque est presque intuitive si l'on se reporte à la signification géométrie que la dérivée (n° **348**). Si, en effet, la dérivée y' est toujours *nulle*, la courbe représentative de la fonction est une courbe telle qu'en *tous* ses points la tangente est parallèle à ox (n° **353**); la courbe ne peut ni monter ni descendre, c'est nécessairement une parallèle à ox qui est à elle-même sa tangente en tous ses points. La fonction y est donc constante.

375. — Théorème. — ***Deux fonctions qui ont même dérivée ne diffèrent que par une constante.***

Soient en effet u et v deux fonctions d'une même variable x admettant la même dérivée, c'est-à-dire telles que

$$u' = v'.$$

Leur différence

$$y = u - v$$

est une fonction de x dont la dérivée est nulle :

$$y' = u' - v' = 0.$$

Cette différence est donc bien constante (n° **374**) et on a :

$$u = v + c.$$

§ 4. — Application des dérivées à l'étude du mouvement.

376. — Mouvement rectiligne. — Un point mobile est dit animé d'un *mouvement rectiligne* lorsqu'il se meut sur une *droite*.

Pour définir la position du point mobile M sur sa trajectoire, à chaque instant, nous procéderons comme nous l'avons fait (n° **101**) pour l'étude du mouvement uniforme.

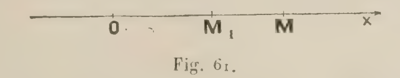


Fig. 61.

Soit O un point de la droite (fig. 61) que décrit le mobile. Prenons sur cette droite un sens positif. La position de M est parfaitement définie par son *abscisse* :

$$x = \overline{OM}.$$

Cette abscisse x a, à chaque instant t, une valeur bien déterminée. En d'autres termes, x est une *fonction* du temps t :

(1) $$x = f(t).$$

La formule (1), qui donne x en fonction du temps, est ce qu'on appelle l'***équation du mouvement***.

Ainsi nous avons vu (n° **101**) que l'équation du mouvement *uniforme* est : $$x = x_0 + v(t - t_0)$$
ou (n° **242**) :

$$x = vt + a.$$

Ici x est une fonction *linéaire* du temps t.

377. — Vitesse. — Considérons un mobile en mouvement sur une droite ox (fig. 61). Soit M sa position à l'instant t et M_1 sa position à un autre instant t_1. Pendant l'intervalle de temps

$$\Delta t = t_1 - t$$

le mobile aura parcouru le segment MM_1 et, *si son mouvement avait été uniforme*, sa vitesse aurait été (n° **100**) $\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$.
C'est ce qu'on appelle la ***vitesse moyenne*** du mobile pendant l'intervalle de temps Δt.

Supposons maintenant que l'intervalle Δt tende vers zéro, la position M_1 deviendra de plus en plus voisine de la position M et $\overline{MM_1}$ tendra aussi vers zéro.

Le quotient $\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$ tendra, en général, vers une limite que l'on appelle la ***vitesse à l'instant*** t.

En résumé :

On appelle **vitesse moyenne** *d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne, pendant un intervalle de temps Δt, le quotient du segment, parcouru par ce mobile dans cet intervalle de temps, par cet intervalle Δt.*

On appelle **vitesse à l'instant** *t la limite de la vitesse moyenne, pendant l'intervalle de temps Δt, lorsque Δt tend vers zéro.*

378. — Théorème. — *La* **vitesse** *dans un mouvement rectiligne est égale à la dérivée de l'abscisse par rapport au temps.*

Soient en effet M et M_1 (fig. 61) les positions d'un mobile aux instants t et $t_1 = t + \Delta t$; et soient x et x_1 les abscisses de ces deux points. On aura (n° **80**) :

$$\overline{MM_1} = x_1 - x = \Delta x,$$

Δx désignant l'accroissement de x *correspondant* à l'accroissement Δt du temps t.

La vitesse *moyenne* est

$$\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Par définition de la dérivée, lorsque Δt tend vers zéro, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ tend vers la dérivée x' ou $\frac{dx}{dt}$ de x par rapport à t.

v désignant la *vitesse* du mobile au temps t, on a, par suite,

$$v = lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = x' = \frac{dx}{dt}.$$

Exemples. — L'équation du mouvement *uniforme* est, comme nous avons vu :

$$x = vt + a$$

sa vitesse est donc :

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

elle est *constante*.

Si l'équation d'un mouvement est :

$$x = 2\,t^3 - 5\,t + 1$$

sa vitesse sera :

$$v = \frac{dx}{dt} = 6\,t^2 - 5.$$

379. — Théorème. — ***Lorsque la vitesse d'un mouvement rectiligne est constante, ce mouvement est uniforme.***

Soit, en effet, v cette vitesse constante et x l'abscisse du point mobile au temps t.

D'après ce qui précède, on a :

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Or, d'autre part, l'expression vt admet aussi pour dérivée v. Il en résulte que x et vt sont deux fonctions de t qui admettent *même* dérivée ; elles ne diffèrent par suite (nº **375**) que par une *constante* et on a :

$$x = vt + a,$$

a désignant une constante. Or ceci est bien l'équation d'un mouvement uniforme. Il résulte de là que

Le mouvement uniforme est le seul mouvement à vitesse constante.

Lorsque la vitesse n'est pas constante le mouvement n'est pas uniforme.

380. — Diagramme des espaces. — Dans un mouvement rectiligne l'abscisse x du mobile est une fonction du temps t :

(1) $$x = f(t).$$

La courbe représentative de cette fonction est ce qu'on appelle le *diagramme* du mouvement. Ici la *variable indépendante* est t, la *fonction* est x; par suite t sera l'*abscisse* et x sera l'*ordonnée*.

Soit D (fig. 62) le diagramme d'un mouvement rectiligne, m un point de D, M et P ses projections sur les axes ox et ot.

Si l'on imagine que le point P se déplace sur ot d'un mouvement uniforme, dans le sens positif, avec la vitesse 1, c'est-à-dire de façon à décrire l'unité de longueur dans l'unité de temps, l'ordonnée $\overline{Pm} = \overline{OM}$ prendra successivement les valeurs de l'abscisse x du point mobile. Par suite le mouvement correspondant de M sera *exactement* le mouvement réel du point mobile sur sa trajectoire rectiligne.

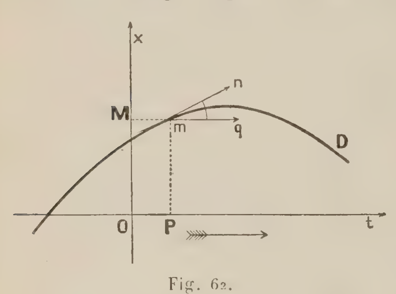


Fig. 62.

Le diagramme d'un mouvement présente plusieurs avantages.

1° Il permet de construire aisément la valeur de x à chaque instant. Il suffit, en effet, de porter sur ot un segment $\overline{OP}$ égal à t et l'ordonnée correspondante $\overline{OM}$ est la valeur de x à l'instant t.

Le diagramme peut ainsi remplacer, par une simple construction géométrique, le calcul de x par une formule ou encore un barême donnant les valeurs de x pour les principales valeurs de t.

2° Le diagramme rend compte du sens et de la *rapidité* du mouvement. Ceci résulte de la proposition suivante :

Nous avons vu (n° **378**) que la vitesse à un instant donné est la valeur à cet instant de la dérivée x' de x

par rapport à t. Or, relativement au diagramme, x' est la dérivée de l'*ordonnée* x par rapport à l'*abscisse* t. C'est donc (n° **348**) le coefficient angulaire de la tangente mn (fig. 62) au point m correspondant du diagramme D.

Il résulte de là que la grandeur de l'angle $\widehat{qmn}$, que fait la tangente mn (dans le sens du mouvement) avec la parallèle mq à la direction positive ot, renseigne sur la rapidité dn mouvement.

Plus l'angle est grand plus la courbe monte ou descend vite, plus le mobile M se meut rapidement sur ox.

Nous avons déjà étudié (n° **242**) le diagramme du mouvement uniforme qui est *une droite* et nous en avons montré l'intérêt (n° **243**) pour les graphiques des chemins de fer.

381. — **Accélération**. — Pour avoir une idée exacte d'un mouvement il faut se rendre compte de sa plus ou moins grande rapidité; il faut, comme on dit vulgairement, savoir si le mobile va plus ou moins vite.

Dans un mouvement uniforme (n° **378**) la vitesse est *constante*, le mobile marche toujours dans le même sens et toujours à la même allure, et il suffit de connaître la valeur de cette vitesse pour avoir une idée exacte de cette allure.

Lorsque le mouvement n'est pas uniforme la vitesse n'est pas constante (N° **379**) et pour avoir une idée juste de la nature du mouvement il faut savoir *comment la vitesse varie*.

Or, le sens de la variation d'une quantité est indiqué par le signe de sa dérivée; nous sommes donc ainsi conduits à calculer la dérivée de la vitesse pour connaître sa variation.

***La dérivée de la vitesse est ce qu'on appelle* l'accélération.**

Si donc nous désignons par j l'accélération et par v la vitesse, on a, par définition,

$$j = v' \quad \text{ou} \quad j = \frac{dv}{dt}.$$

Dans un mouvement uniforme, la vitesse v étant constante, l'accélération j est *nulle*.

382. — Hodographe des vitesses. — On peut définir l'accélération d'une façon un peu différente.

Soit M le point mobile (fig. 63) sur la droite ox et soit v sa vitesse à l'instant t. On représente souvent cette vitesse par un *segment* $\overline{MV}$ ayant pour mesure algébrique v et porté par ox.

Par un point fixe O′ menons à chaque instant t, le *segment* $\overline{o'm}$ égal au segment $\overline{MV}$ parallèle et de même sens. Si le mouvement du point M n'est pas uniforme, la vitesse v varie avec t et, par suite, le point m est animé d'un mouvement rectiligne sur un axe $o'v$ parallèle à l'axe ox.

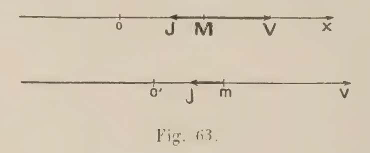


Fig. 63.

La trajectoire $o'v$ du point m est ce qu'on appelle l'***hodographe*** des vitesses du point M.

L'*accélération* du point M n'est autre chose que la *vitesse du point m* sur l'hodographe.

Cette nouvelle définition concorde bien avec la précédente, car la vitesse de m est la dérivée de l'abscisse de m, c'est-à-dire la dérivée de v. Elle montre que l'*accélération n'est autre chose que la vitesse de la vitesse*. On peut alors, à son tour, la représenter par un *segment* $\overline{mj}$ ou le segment égal et parallèle $\overline{MJ}$ porté par ox.

383. — Théorème. — ***L'accélération d'un point animé d'un mouvement rectiligne est égale à la dérivée seconde de l'abscisse du point par rapport au temps.***

En effet, l'accélération est la dérivée de la vitesse qui

elle-même est la dérivée de l'abscisse. L'accélération est donc bien la dérivée de la dérivée de l'abscisse, c'est-à-dire la dérivée *seconde* de l'abscisse.

Exemples. — Supposons que l'équation d'un mouvement soit :

$$x = 3t^2 - 5t + 1$$

La vitesse est :

$$v = x' = 6t - 5$$

et l'accélération est :

$$j = v' = x'' = 6.$$

De même si l'équation est

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4,$$

la vitesse est :

$$v = x' = t^2 - 4t,$$

l'accélération est :

$$j = v' = x'' = 2t - 4.$$

384. — Diagramme des vitesses. — La vitesse v d'un mouvement étant une fonction du temps t, on peut la représenter géométriquement par une courbe qui est le *diagramme des vitesses*. La *variable indépendante* étant t et la *fonction* étant v, c'est t qui est l'*abscisse* et v l'*ordonnée* par rapport à deux axes ot et ov (fig. 64). Ce diagramme C joue, par rapport aux vitesses, le même rôle que le diagramme du mouvement par rapport aux abscisses. Or, comme l'accélération est la vitesse de la vitesse, on en conclut immédiatement (n° **380**) que l'*accélération à un instant donné est égal au coefficient angulaire de la tangente au point correspondant du diagramme des vitesses*.

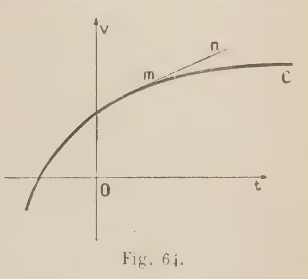


Fig. 64.

Dans un mouvement uniforme la vitesse est *constante*. Le diagramme de la vitesse d'un mouvement uniforme est donc *une parallele à l'axe ot*.

En particulier, le *repos* est le cas où la vitesse est *nulle*. Il a donc pour diagramme de vitesse l'axe *ot* lui-même.

385. — Mouvement varié. — *Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit* **varié**.

Un mouvement varié est dit **accéléré** *lorsque la valeur absolue de sa vitesse croît; il est au contraire dit* **retardé** *lorsque la valeur absolue de sa vitesse décroît.*

Pour reconnaître si un mouvement est accéléré ou retardé, il faut donc reconnaître le sens de la variation de la *valeur absolue* de la vitesse. Or, comme la valeur absolue de la vitesse varie dans le même sens que son *carré*, il suffit de rechercher le sens de la variation du carré v^2 de la vitesse.

A cet effet, prenons la dérivée de v^2. On a (nº **365**)

$$(v^2)' = 2vv'$$

et, comme

$$v' = j,$$

j étant l'accélération, on en déduit

$$(v^2)' = 2vj.$$

Tout revient donc à étudier le signe du produit vj de la vitesse par l'accélération.

Si $vj > 0$ le mouvement est *accéléré*;

Si $vj < 0$ le mouvement est *retardé*.

386. — Mouvement uniformément varié. — Ce qui caractérise un mouvement varié c'est que sa vitesse varie avec le temps. Le plus simple des mouvements variés est évidemment celui dans lequel la vitesse varie proportionnellement au temps, c'est ce qu'on appelle *le mouvement uniformément varié*. En d'autres termes :

On appelle **mouvement uniformément varié** *celui dans lequel la vitesse est une fonction linéaire du temps.*

Dans un tel mouvement on a donc :

$$v = at + b$$

On en conclut, pour l'accélération :

$$j = v' = a$$

L'accélération d'un mouvement uniformément varié est **constante**.

387. — Théorème. — *Lorsque l'accélération du mouvement rectiligne d'un point est* **constante** *:*

1° *Si cette accélération est* **nulle** *le mouvement est* **uniforme** ;

2° *Si cette accélération* **n'est pas nulle** *le mouvement est* **uniformément varié**.

1° Si l'accélération est *nulle*, cela veut dire que la dérivée de la vitesse est nulle, donc (n° **374**) la vitesse est constante et le mouvement est uniforme (n° **379**).

2° Si l'accélération est constante et a une valeur a *non nulle*, on a :

$$v' = a.$$

Or, comme la fonction at a aussi pour dérivée a, on voit que v et at ayant la même dérivée (n° **375**) ne diffèrent que par une constante, on a donc bien :

$$v = at + b,$$

b étant une constante ; et le mouvement est uniformément varié.

388. — Équation du mouvement uniformément varié. — D'après la définition précédente un mouvement est uniformément varié si l'on a, entre la vitesse v et le temps t, une relation de la forme :

$$v = at + b.$$

Ceci revient à dire que, si x est l'abscisse du point mobile au temps t, on a pour sa dérivée :

$$x' = at + b.$$

D'autre part, la fonction $\frac{1}{2}at^2 + bt$ admet aussi $at + b$ pour dérivée ; il en résulte que x ne differe de $\frac{1}{2}at^2 + bt$

que par une constante et que l'on a :

$$(1) \qquad x = \frac{1}{2}at^2 + bt + c.$$

Dans un mouvement rectiligne uniformément varié l'abscisse du mobile est une fonction du second degré du temps.

La réciproque est évidente, car si x est un trinôme du second degré en t, la vitesse, qui est sa dérivée, est linéaire en t, et le mouvement est uniformément varié.

Signification des constantes. — L'équation (1) du mouvement uniformément varié contient trois constantes a, b, c, dont nous allons rechercher la signification.

D'abord l'équation (1) elle-même montre que la constante c est la valeur de x pour $t = 0$, ce qu'on appelle la valeur *initiale* de x.

En dérivant l'équation (1), on a :

$$(2) \qquad v = at + b,$$

et cette égalité montre que la constante b est la valeur de la vitesse v pour $t = 0$.

Enfin, a est *l'accélération*.

Il résulte de là que :

Un mouvement rectiligne uniformément varié est parfaitement déterminé lorsqu'on connaît : 1° son accélération; 2° l'abscisse et la vitesse initiales.

Si j est l'accélération, x_0 et v_0 les valeurs de x et v pour $t = 0$, on a :

$$a = j \quad , \quad b = v_0 \quad , \quad c = x_0.$$

et, par suite, l'équation du mouvement est :

$$(3) \qquad x = \frac{1}{2}jt^2 + v_0t + x_0.$$

389. — Diagrammes du mouvement uniformément varié. — Puisque, dans un mouvement uniformément varié, l'abscisse x est un trinôme du second degré en t,

le *diagramme des espaces*, qui est la courbe représentative de ce trinôme, est (nº **304**) une *parabole*.

La courbe tracée dans la machine de Morin pour vérifier les lois de la pesanteur est précisément une parabole, diagramme des espaces.

La vitesse v étant une *fonction linéaire*, le *diagramme des vitesses* est une droite (nº **232**) dont le coefficient angulaire a est *l'accélération*.

390. — Mouvement vertical d'un point pesant. — L'expérience nous apprend que quand on abandonne un point pesant en chute libre, dans le vide, ce point tombe suivant une verticale et *que les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.* Il résulte de là que si x est la hauteur de chute, on a :

$$x = at^2$$

et, par suite, que le mouvement vertical d'un point pesant est uniformément varié.

L'expérience prouve également que l'accélération de ce mouvement, dirigée suivant la verticale de haut en bas, a *à peu près* la même valeur sur toute la terre. On la désigne par la lettre g et sa valeur à Paris est environ 981 dans le système C. G. S.

Supposons, alors, qu'on lance un point matériel pesant dans le vide, *suivant la verticale*, avec une vitesse initiale v_0. Sa trajectoire sera une verticale et son mouvement uniformément varié.

Prenons, sur cette verticale, pour origine O des abscisses le point de départ du mobile et pour origine des temps ($t = o$) l'instant de ce départ. Choisissons comme sens positif ox sur cette verticale le sens *de haut en bas* de telle sorte que la mesure algébrique g de l'accélération sera positive.

En appliquant l'équation (3) du nº **388**, on a ici :

$$x_0 = o \quad \text{et} \quad j = g,$$

et l'équation du mouvement du point pesant est :

$$(4) \qquad x = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t.$$

Pour discuter cette équation et le mouvement, nous distinguerons trois cas suivant le signe de v_0.

391. — Premier cas. — *Chute libre.* — Supposons le mobile abandonné en O sans vitesse initiale, on aura $v_0 = 0$ et l'équation (4) se réduit à :

$$(5) \qquad x = \frac{1}{2} g t^2$$

d'où

$$v = gt.$$

Le temps t étant toujours positif, la vitesse v est toujours positive et *croît* ; le point descend suivant la verticale d'un mouvement uniformément *accéléré*.

Pendant la première seconde il parcourt l'espace $\frac{1}{2} g = 490^{cm},5$, pendant la seconde suivante il parcourt l'espace $\frac{1}{2} g \ (4 - 1) = \frac{3}{2} g$; pendant la troisième seconde il parcourt l'espace

$$\frac{1}{2} g \, (3^2 - 2^2) = \frac{5}{2} g, \qquad etc...$$

Les abscisses varient proportionnellement aux carrés des temps, mais les *espaces* parcourus pendant les secondes successives croissent comme 1, 3, 5, ... les nombres impairs.

Exercice. — *Supposons, par exemple, qu'on ait abandonné le mobile à une hauteur* h *du sol. Quel sera le temps de la chute et la vitesse d'arrivée?*

Le temps t et la vitesse d'arrivée v seront donnés par les égalités :

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \qquad , \qquad v = gt.$$

La première donne :

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \, ;$$

la seconde donne :

$$v = g\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}.$$

392. — Second cas. — *Le point est lancé verticalement de haut en bas.* — La vitesse initiale v_0 est alors *positive* ; comme t est positif (puisque l'instant initial est $t = o$) les formules

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t,$$
$$v = gt + v_0,$$

montrent que v est toujours positif et croît; par suite que x est aussi toujours positif et croît.

Le point *descend* suivant la verticale d'un mouvement uniformément *accéléré*.

393. — Troisième cas. — *Le point est lancé verticalement de bas en haut.* — Dans ce cas la vitesse initiale v_0 est négative.

La formule

$$v = gt + v_0$$

montre que la vitesse v est d'abord *négative*. Le point *monte* ; v et g étant de signes contraires, v décroît en valeur absolue. Le mouvement est uniformément *retardé*.

A l'instant

$$t = -\frac{v_0}{g} > o,$$

la vitesse v s'annule et change de signe. Le mobile a atteint sa position S la plus élevée (fig. 65) d'abscisse

$$x = \frac{1}{2}g\,\frac{{v_0}^2}{g^2} - \frac{{v_0}^2}{g} = -\frac{{v_0}^2}{2g}.$$

Puis la vitesse v devient positive, le point redescend d'un mouvement uniformément *accéléré* puisque v et g sont alors de même signe.

En résumé, le point monte de O en S (fig. 65) d'un mou-

vement uniformément retardé; puis il redescend d'un mouvement uniformément accéléré.

Les formules qui donnent x et v peuvent se mettre sous la forme :

$$v = \frac{1}{2} g \left(t + \frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{v_0^2}{2g},$$

$$v = g\left(t + \frac{v_0}{g}\right).$$

Elles montrent que, pour les deux instants :

$$t = -\frac{v_0}{g} - \theta \qquad \text{et} \qquad t = -\frac{v_0}{g} + \theta,$$

qui précèdent et suivent l'instant de passage au point culminant S du même intervalle de temps θ, x reprend la même valeur

$$x = \frac{1}{2} g \theta^2 - \frac{v_0^2}{2g}$$

Fig. 65.

et v prend des valeurs opposées.

On en conclut qu'étant donné (fig. 65) un point P entre O et S, le mobile passe deux fois en P, une fois en montant et l'autre fois en descendant : 1° il met le même temps θ à monter de P en S qu'à redescendre de S en P; 2° il passe les deux fois avec la *même* vitesse en P.

En particulier il revient au point O au temps

$$t = -2\frac{v_0}{g}$$

avec la vitesse $-v_0$ opposée à la vitesse initiale.

EXERCICES

DÉRIVÉES ET VARIATIONS DE FONCTIONS.

495. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = 3x - 1 \quad ; \quad y = 8x + 7 \quad ; \quad y = 3 - 2x \quad ; \quad y = \frac{2}{3} - x.$$

Représenter graphiquement ces fonctions.

496. Trouver directement la dérivée de la fonction

$$y = x^2 - 7x - 1.$$

Construire la courbe des variations de y.

497. Calculer directement la dérivée de

$$y = x^3 + 2x - 1.$$

498. Calculer directement les dérivées des fonctions

$$y = x \quad ; \quad y = x^2 \quad ; \quad y = x^3 \quad ; \quad y = x^4$$

et énoncer la loi de formation des dérivées des puissances successives de la variable x.

499. Étant donnée la fonction

$$y = px^2 + qx + 1,$$

déterminer p et q de façon que y soit maximum ou minimum pour $x = 4$ et que pour $x = 3$ la fonction s'annule.

500. Trouver directement la dérivée de

$$y = x^3 + px$$

et étudier la variation de la fonction.

501. Calculer la dérivée de

$$y = \frac{2x - 3}{1 - x}$$

et construire la courbe des variations de cette fonction.

502. Calculer les dérivées des fonctions

$$y = \frac{3 - 4x^2}{4x - 3} \quad ; \quad y = x - \frac{a^2}{x} \quad ; \quad y = \frac{3x - 1}{2x + 1}.$$

503. Trouver la dérivée de

$$y = x + \frac{1}{x + \alpha}$$

et déterminer α de façon que la valeur de x qui rend y minimum soit double de celle qui rend y maximum.

504. La dérivée seconde d'une fonction de x est la dérivée de la dérivée de cette fonction ; y' désignant la dérivée première, y'' désigne la dérivée seconde de la fonction y.

Vérifier qu'entre les dérivées de

$$y = \frac{1 + x}{1 - x}$$

on a la relation

$$y'' = y'y + y'.$$

505. Calculer les dérivées y' et y'' de la fonction

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

et vérifier que l'on a :

$$2y^3 - 2y'^2 + yy'' = 0.$$

506. Dans un rectangle de carton ABCD, on découpe aux quatre coins quatre carrés égaux, on plie le carton suivant les lignes A′B′, B′C′, C′D′, D′A′ et, en relevant les quatre petits rectangles latéraux, on forme un parallélépipède rectangle.

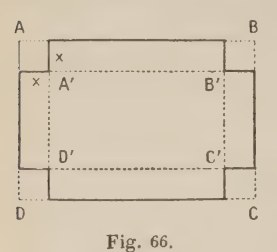


Fig. 66.

1° En supposant que les dimensions du rectangle en carton soient

$$AB = 30 \text{ centimètres}$$
$$BC = 20 \text{ centimètres},$$

étudier la variation du volume du parallélépipède en fonction de la longueur x du côté des carrés découpés; on remarquera que x ne peut varier que de 0 à 10 centimètres.

Pour quelle valeur de x le volume du parallélépipède est-il maximum?

2° Faire le même problème en supposant que les dimensions du rectangle soient

$$AB = 2a \quad , \quad BC = 2b.$$

Ici $(a > b)$ x ne pourra varier que de 0 à b

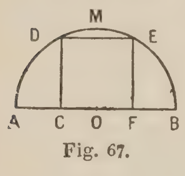


Fig. 67.

507. Dans une voûte demi-cylindrique dont la section droite est un demi-cercle AMB de rayon r, on peut installer un réservoir parallélépipèdique dont la section droite est le rectangle CDEF inscrit dans le demi-cercle. Pour quelle valeur du côté $CF = 2x$ du rectangle, le volume du réservoir sera-t-il maximum? A cet effet on étudiera la variation du carré du volume.

508. D'après les expériences de Hallstrôm le volume v d'une masse d'eau qui à 0^0 a un volume de 1 litre est donné, en litres, par la formule suivante :

$$v = \frac{1}{1 + at + bt^2 + ct^3}$$

où t désigne la température en degrés centigrades et où a, b, c, sont des constantes ayant les valeurs suivantes :

$$a = 0{,}000052939,$$
$$b = -0{,}0000065322,$$
$$c = 0{,}00000001445.$$

D'après cela, calculer la température pour laquelle le volume v est minimum.

509. Si l'on désigne par T le travail, exprimé en kilogrammètres, qu'un cycliste doit dépenser à la seconde pour marcher dans une *descente* de pente p à la vitesse de v kilomètres à l'heure, on a la formule moyenne suivante :

$$T = (0{,}224 - 22{,}4p)v + 0{,}00084\, v^3.$$

Lorsque la valeur de T fournie par cette formule est *positive*, cela signifie que le cycliste doit *pousser* sur les pédales; lorsque cette valeur est

négative, cela signifie que le cycliste doit *retenir* sur les pédales pour ne pas se laisser entraîner et maintenir la vitesse v.

Ceci posé :

1° Calculer pour les pentes 0,02 ; 0,03 ; 0,04 et 0,05, la vitesse à laquelle le cycliste marcherait s'il laissait la machine rouler seule ($T = 0$).

2° Calculer pour les mêmes pentes, la vitesse pour laquelle le travail de retenue sur les pédales à la seconde est maximum, en valeur absolue.

3° Étudier, pour chaque pente, la variation de T en fonction de v.

510. Retrouver la règle de la dérivée d'un quotient de la façon suivante.

On pose :

$$y = \frac{u}{v},$$

on en tire

$$u = vy,$$

on prend les dérivées des deux membres de cette égalité et on en tire y'.

511. Démontrer que la dérivée de

$$(1) \qquad y = \sqrt{u},$$

où u désigne une fonction de x, est :

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

A cet effet on déduit de l'égalité (1) celle-ci :

$$u = y^2,$$

on prend la dérivée des deux membres et on en tire y'.

Appliquer le même procédé à la recherche de la dérivée de

$$y = \sqrt[m]{u}.$$

512. Calculer les *trois* premières dérivées des polynomes suivants :

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$
$$y = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1,$$
$$y = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1,$$
$$y = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1.$$

513. Montrer que la dérivée $(m+1)^{ième}$ d'un polynome de degré m est nulle.

514. En se servant des résultats trouvés dans l'exercice **511**, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$y = \sqrt{x^4 + x^2 + 1},$$
$$y = \sqrt[3]{x^3 - 7x + 2},$$
$$y = x + \sqrt{x^2 + a},$$
$$y = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}},$$

515. Calculer les dérivées et étudier les variations des fonctions suivantes

$$y = x^4 - x^2 + a,$$

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1},$$

$$y = \frac{5x - 3}{x^2 - 3x + 2},$$

$$y = \frac{x - 1}{(x + 1)^2},$$

$$y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 1},$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}.$$

MOUVEMENT UNIFORMÉMENT VARIÉ.

516. Calculer dans le système C. G. S. le temps de chute et la vitesse acquise par un point pesant tombant dans le vide de 300 mètres de haut.

517. Avec quelle vitesse faut-il lancer verticalement de bas en haut un point pesant dans le vide, pour qu'il s'élève de 100 mètres en une seconde?

518. Avec quelle vitesse faut-il lancer verticalement de haut en bas, dans le vide, un point pesant pour qu'en atteignant le sol (à 20 mètres) il ait une vitesse de 300 mètres à la seconde ?

519. Quelle est l'accélération d'un mouvemeut uniformément varié qui fait parcourir 1 kilomètre en 5 secondes à un mobile lancé avec une vitesse initiale de 100 mètres à la seconde ?

520. Calculer la vitesse finale d'un mobile qui, partant du repos, a décrit, d'un mouvement uniformément varié, un espace e dans un temps t.

521. D'un point situé à une hauteur h au-dessus du sol on lance verticalement, dans le vide, un corps pesant. Quelle doit-être la vitesse initiale pour que la vitesse du mobile au moment où il atteint le sol soit égale à v ? — Discuter.

522. On laisse tomber une pierre d'une hauteur h dans un bassin d'eau de profondeur h'.

L'accélération dans le vide étant g et dans l'eau g' $(g' < g)$, calculer le temps que la pierre met à atteindre le fond du bassin.

Application numérique : $h = 20$ mètres, $h' = 6$ mètres, $g = 9^{\text{m}},81$ à la seconde $g' = 4^{\text{m}},60$ à la seconde (on suppose évidemment le mouvement dans l'eau uniformément accéléré et on admet que la pierre ne subit pas de diminution de vitesse lorsqu'elle pénètre dans l'eau).

CHAPITRE IX

PROGRESSIONS, LOGARITHMES, INTÉRÊTS

§ 1. — Progressions arithmétiques.

394. — **Définition.** — *On appelle* **progression arithmétique** *une suite de termes tels que l'excès d'un terme quelconque sur le précédent soit constant.*

Cet excès constant est ce qu'on appelle la **raison** *de la progression.*

On indique souvent une progression arithmétique en faisant précéder le premier terme du signe ÷ et en séparant deux termes consécutifs par un point.

Ainsi

$$\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdots$$

est une progression arithmétique, car

$$7 - 3 = 11 - 7 = 15 - 11 = 19 - 15 = 4.$$

La *raison* de la progression est 4.

395. — **Calcul du terme de rang** n. — Considérons une progression arithmétique $\div a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots.$

D'après la définition même, on a :

$$b - a = c - b = d - c = \cdots = r,$$

en désignant par r la raison.

On en conclut :

$$b = a + r, \quad c = b + r, \quad d = c + r. \ \ldots$$

Chaque terme de la progression se déduit du précédent en lui ajoutant la raison.

Cela étant, le premier terme de la progression est a; le second est $a+r$; le troisième s'obtient en ajoutant r au second, c'est donc $(a+r)+r=a+2r$; le quatrième se déduit du troisième en lui ajoutant r, c'est donc $a+3r$ et ainsi de suite.

On voit qu'en général :

On obtient un terme quelconque en ajoutant au premier terme autant de fois la raison qu'il y a de termes avant celui que l'on veut calculer.

Le terme de rang n est donc :

$$a+(n-1)r,$$

car il a $n-1$ termes avant lui.

Exemple. — La suite des nombres impairs

$$\div 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdots$$

forme une progression arithmétique de raison 2.

Le $n^{\text{ième}}$ nombre impair est donc :

$$1+2(n-1)=2n-1.$$

396. — Remarque. — *Lorsque dans une progression arithmétique on renverse l'ordre des termes, on a une nouvelle progression dont la raison est opposée à celle de la première.*

Ceci est évident, car si

$$\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f$$

est une progression de raison r, on a :

$$b-a=c-b=d-c=e-d=f-e=r.$$

On en conclut :

$$e-f=d-e=c-d=b-c=a-b=-r.$$

Ce qui prouve que

$$\div f \cdot e \cdot d \cdot c \cdot b \cdot a \cdot$$

est une progression arithmétique de raison $-r$.

397. — Théorème. — ***Dans une progression arithmétique limitée, la somme de deux termes équidistants des extrêmes est constante et égale à la somme des extrêmes.***

Soit, en effet

$$\div \underbrace{a \cdot b \cdot c \cdot \ \ldots}_{p \text{ termes}} \ g \ \ldots \ h \ \underbrace{\ldots \ j \cdot k \cdot l \cdot}_{p \text{ termes}}$$

une progression de raison r. Soient g le terme qui en a p *avant* lui et h le terme qui en a p *après* lui.

On a (nº **395**) $\quad g = a + pr.$

D'autre part, si on renverse l'ordre des termes, on aura une nouvelle progression de raison $(-r)$, dont le premier terme sera l et où h en aura p avant lui. On a donc :

$$h = l + p(-r) = l - pr.$$

De là on conclut :

$$g + h = a + pr + l - pr = a + l.$$

398. — Somme des termes. — ***La somme des termes d'une progression arithmétique limitée est égale au produit de la demi-somme des extrêmes par le nombre des termes.***

Soient

$$\div a \cdot b \cdot c \cdot \ \ldots\ldots \ h \cdot k \cdot l \cdot$$

une progression arithmétique de n termes, et S la somme de ces termes :

$$(1) \qquad S = a + b + c + \cdots + h + k + l.$$

Dans le second membre, intervertissons l'ordre des termes. Nous avons :

$$(2) \qquad S = l + k + h + \cdots + c + b + a.$$

Ajoutons les égalités (1) et (2) membres à membres, il vient :

$$2S = (a + l) + (b + k) + (c + h) + \cdots + (h + c) + (k + b) + (l + a).$$

Dans le second membre, il y a n parenthèses, et chacune est la somme de deux termes équidistants des extrêmes, donc chacune est égale à $(a+l)$. Le second membre est ainsi égal à n fois $(a+l)$.

$$2S=(a+l)n,$$

d'où

$$S=\frac{a+l}{2}\cdot n. \tag{3}$$

399. — Remarque. — Comme la progression a n termes, on a :

$$l=a+(n-1)r.$$

En portant cette valeur de l dans la formule (3), on a la nouvelle expression de la somme :

$$S=\frac{2a+(n-1)r}{2}\cdot n.$$

400. — Applications. — *Somme des* n *premiers nombres entiers.*

La suite des nombres entiers forme une progression arithmétique de raison 1.

La somme des n premiers nombres entiers est donc

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}.$$

Ainsi la somme des 100 premiers nombres entiers est :

$$\frac{101\cdot 100}{2}=5\,050.$$

401. — *Somme des* n *premiers nombres impairs.* — La suite des nombres impairs est une progression arithmétique de raison 2. Le premier nombre est 1. Le $n^{ième}$ nombre impair est $2n-1$ (n° **395**).

La somme des n premiers nombres impairs est donc :

$$\frac{(2n-1+1)n}{2}=n^2.$$

Cette somme est donc égale au *carré de n*.

Ainsi

$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2.$$

§ 2. — Progressions géométriques.

402. — Définition. — *On appelle* **progression géométrique** *une suite de termes tels que le rapport d'un terme quelconque au précédent soit constant.*

Ce rapport constant est ce qu'on appelle la **raison** *de la progression.*

On indique souvent une progression géométrique en faisant précéder le premier terme du signe ∺ et séparant deux termes consécutifs par deux points.

Ainsi

$$∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32$$

est une progression géométrique de raison 2, car on a :

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{32}{16}=2.$$

403. — Calcul du terme de rang n. — Considérons une progression géométrique

$$∺ a : b : c : d : \ldots$$

de raison q.

Par définition, on a :

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\ldots=q.$$

On en conclut :

$$b=aq \quad , \quad c=bq \quad , \quad d=cq. \quad \ldots$$

Chaque terme de la progression est égal au produit du précédent par la raison.

Cela étant, le premier terme de la progression est a; le second est égal à aq; le troisième est égal au second multiplié par q, il est donc égal à $aq \cdot q = aq^2$; le quatrième est égal au troisième multiplié par q, donc à $aq^2 q = aq^3$; et ainsi de suite.

On voit qu'en général :

On obtient un terme quelconque en multipliant le premier terme par autant de fois la raison qu'il y a de termes avant celui que l'on veut calculer.

Le terme de rang n est donc : aq^{n-1}.

Exemple. — Considérons la progression

$$\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : \cdots$$

de raison 10. Le terme de rang n est

$$1 \cdot 10^{n-1} = 10^{n-1}.$$

404. — Remarques. — *Les termes d'une progression géométrique vont en croissant ou en décroissant en valeur absolue suivant que la raison est plus grande ou plus petite que* 1, *en valeur absolue.*

Ainsi la progression

$$\div\!\div\ 1 : 2 : 4 : 8 : \cdots$$

de raison 2, *plus grande que* 1, est une progression *croissante.*

Au contraire la progression

$$\div\!\div\ 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \cdots$$

de raison $\frac{1}{2}$, *plus petite que* 1, est une progression *décroissante.*

Lorsqu'on renverse l'ordre des termes d'une progression géométrique, on obtient une nouvelle progression dont la raison est l'inverse de celle de la première.

Car si

$$\div\!\div\ a : b : c : d : f : g$$

est une progression géométrique de raison q, on a :

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{f}{d} = \frac{g}{f} = q.$$

On en conclut :

$$\frac{f}{g}=\frac{d}{f}=\frac{c}{d}=\frac{b}{c}=\frac{a}{b}=\frac{1}{q},$$

ce qui prouve que la suite

$$\div\!\!\div g : f : d : c : b : a$$

est une progression géométrique de raison $\frac{1}{q}$.

405. — **Somme des termes.** — ***La somme des termes d'une progression géométrique est égale au quotient de l'excès du produit du dernier terme par la raison sur le premier terme, par l'excès de la raison sur l'unité.***

Soit, en effet :

$$\div\!\!\div a : b : c : \ldots . h : k : l$$

une progression géométrique de raison q et S la somme de ses termes :

$$(1) \qquad S = a + b + c + \ldots . + h + k + l.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par q et observons que

$$aq = b \quad , \quad bq = c \quad , \quad \ldots . \quad hq = k \quad , \quad kq = l;$$

nous obtiendrons :

$$(2) \qquad S \cdot q = b + c + \ldots . + k + l + lq.$$

Retranchons les égalités (1) et (2) membre à membre et simplifions en supprimant les termes communs aux seconds membres b, c, ..., h, k, l; il vient :

$$S \cdot q - S = lq - a;$$

ou, en mettant S en facteur,

$$S(q - 1) = lq - a.$$

Si q est *différent de* 1, $q - 1$ n'est pas nul et on a :

$$(3) \qquad S = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

406. — **Remarque I.** — Comme la progression a n termes, on a :

$$l = aq^{n-1}.$$

La formule (3) peut donc s'écrire, en remplaçant l par sa valeur,

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

On a donc l'*identité* :

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ou

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ou encore :

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2} + q^{n-1})(q - 1) = q^n - 1.$$

Identité déjà indiquée au n° **130**.

Exemple. — D'après cela on a :

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

De même,

$$1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}.$$

407. — **Remarque II.** — Nous avons supposé q *différent de* 1. Lorsque q est égal à 1, la progression n'a *aucun intérêt*. Tous ses termes sont égaux : la somme des n premiers est donc égale à n *fois l'un d'eux*.

§ 3. — Logarithmes.

408. — **Définition générale.** — Considérons deux progressions croissantes : l'une arithmétique dont le premier terme est *zéro* et la raison r, l'autre géométrique dont le premier terme est 1 et la raison q :

$$\div\, 0 . r . 2r . 3r . 4r . \dots\dots . nr . \dots$$

$$\div\div\, 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \dots\dots : q^n : \dots$$

Par définition :

Un terme quelconque de la progression arithmétique est appelé le* logarithme *du terme de même rang de la progression géométrique.

Inversement :

Un terme quelconque de la progression géométrique est appelé l'* antilogarithme *du terme de même rang de la progression arithmétique.

Ainsi le logarithme de q^4 est $4r$ et inversement q^4 est l'antilogarithme de $4r$.

L'antilogarithme d'un nombre a *est donc le nombre qui a pour logarithme* a.

On conçoit aisément qu'en choisissant q assez voisin de 1 et r assez voisin de 0, les deux progressions peuvent être telles que deux termes consécutifs diffèrent excessivement peu. On peut alors dire que tout nombre plus grand que 1 figure, *avec une certaine approximation*, dans la progression géométrique.

Un nombre quelconque plus grand que 1 a alors un logarithme.

Ainsi, si je voulais avoir le logarithme de 2,5123, je chercherais si le nombre 2,5123 figure dans la progression géométrique. Si *oui*, le nombre écrit au-dessus, dans la progression arithmétique, sera son logarithme. Si *non*, je prendrai le nombre de la progression géométrique le *plus voisin*. Si, par exemple, il figure dans la progression le nombre 2,5122, je prendrai le logarithme de ce nombre qui sera une valeur *approchée* du logarithme de 2,5123.

409. — La définition précédente ne définit que les logarithmes de nombres plus grands que 1, car la progression géométrique croissante ($q > 1$) :

$$\div\div\ 1 : q : q^2 : q^3 \ldots$$

ne comprend que des nombres plus grands que 1.

Par définition :

Le logarithme d'un nombre plus petit que 1 est le nombre opposé au logarithme de son inverse.

Ainsi, considérons le nombre $\frac{1}{2}$· Pour avoir son logarithme, nous prendrons le nombre *opposé* au logarithme de son inverse 2. Si le logarithme de 2 est 0,301, celui de $\frac{1}{2}$ sera $-0,301$.

De cette façon un *nombre quelconque a un logarithme*, car, soit ce nombre, soit son inverse sera très approximativement contenu dans la progression géométrique.

410. — Logarithmes décimaux. — De la définition qui précède il résulte qu'il y a une *infinité* de systèmes de logarithmes, car on peut prendre arbitrairement q et r.

On démontre qu'il est possible de choisir q *et* r *de façon que le logarithme de* 10 *soit* 1.

Nous l'admettrons.

Ce système de logarithmes est dit système des logarithmes *décimaux* ou logarithmes *vulgaires*.

Dans ce système on a :

$$r = 0,0\,001,$$
$$q = 1,0\,002\,303\,115\,\ldots.$$

Le 10 001me terme de la progression arithmétique est alors 1 ; tandis que le 10 001me terme de la progression géométrique est 10.

On désigne le logarithme vulgaire d'un nombre x par la notation $\log x$.

On a donc :

$$\log 1 = 0 \quad , \quad \log 10 = 1.$$

411. — Remarque I. — *Dans tout système de logarithmes le logarithme de* 1 *est toujours* 0.

Car les deux progressions commencent toujours par 0 et 1.

Le logarithme d'un nombre *plus grand que* 1 est *positif*; le logarithme d'un nombre *plus petit que* 1 est *négatif*.

412. — Remarque II. — *On appelle* **base** *d'un système de*

logarithmes le nombre qui, dans ce système, a pour logarithme 1.

La base des logarithmes vulgaires est donc 10.

413. — **Remarque III.** — Il faut remarquer avec soin qu'on n'a défini que les logarithmes de nombres *positifs*.

414. — **Propriétés des logarithmes.** — Les logarithmes jouissent de propriétés importantes grâce auxquelles leur emploi est très utile dans les calculs numériques.

Voici ces principales propriétés.

415. — **Propriété I.** — ***Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs.***

Soient a et b deux nombres, nous allons prouver que l'on a

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Nous distinguerons trois cas :

1° $a > 1$ *et* $b > 1$. — Dans ce cas a et b figurent tous deux dans la progression géométrique

$$\div\!\div\, 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots$$

et on aura :

$$a = q^n, \qquad b = q^{n'}.$$

Mais alors (n° **47**)

$$ab = q^n q^{n'} = q^{n+n'}.$$

Or, par définition,

$$\log a = \log q^n = nr,$$
$$\log b = \log q^{n'} = n'r,$$
$$\log ab = \log q^{n+n'} = (n + n')r.$$

On a donc bien :

$$\log ab = \log a + \log b.$$

2° $a > 1$ *et* $b < 1$. — Dans ce cas a figure dans la pro-

gression géométrique, mais b n'y figure pas. Le logarithme de b est alors le nombre opposé au logarithme de $\frac{1}{b}$.

Soit

$$a = q^n, \quad \frac{1}{b} = q^{n'},$$

on a :

$$b = \frac{1}{q^{n'}},$$

d'où (n° **61**)

$$ab = \frac{q^n}{q^{n'}} = q^{n-n'},$$

en supposant n plus grand que n'.

On a donc, par définition,

$$\log a = q^n = nr,$$
$$\log b = -\log q^{n'} = -n'r,$$
$$\log ab = \log q^{n-n'} = (n-n')r,$$

et on a encore :

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Nous avons supposé $a > \frac{1}{b}$. Si on avait $a < \frac{1}{b}$, on aurait $n' > n$ et, par suite,

$$ab = \frac{q^n}{q^{n'}} = \frac{1}{q^{n'-n}},$$

d'où

$$\log ab = -\log q^{n'-n} = -(n'-n)r = (n-n')r,$$

et le raisonnement subsiste.

3° $a < 1$ *et* $b < 1$. — Dans ce cas il faut prendre les inverses $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

Soit

$$\frac{1}{a} = q^n, \qquad \frac{1}{b} = q^{n'}.$$

on a :

$$a = \frac{1}{q^n}, \qquad b = \frac{1}{q^{n'}},$$

d'où

$$ab = \frac{1}{q^n} \cdot \frac{1}{q^{n'}} = \frac{1}{q^{n+n'}}.$$

Par définition (n° 409), on a alors :

$$\log a = -\log q^n \quad = -nr,$$
$$\log b = -\log q^{n'} \quad = -n'r,$$
$$\log ab = -\log q^{n+n'} = -(n+n')r,$$

et on a encore bien :

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Le théorème est donc général pour un produit de deux facteurs.

416. — La propriété s'étend alors, sans difficulté, à un produit de plusieurs facteurs.

Considérons, en effet, le produit *abcd*. On peut le considérer comme le produit de a par *bcd* et on a :

(1) $$\log abcd = \log a + \log bcd.$$

De même, *bcd* peut être considéré comme le produit de b par *cd* et, en appliquant le théorème vrai pour deux facteurs, on a :

(2) $$\log bcd = \log b + \log cd.$$

Enfin, on a :

(3) $$\log cd = \log c + \log d.$$

En ajoutant, membres à membres, les trois égalités (1), (2) et (3) et supprimant de chaque côté les termes communs, log *bcd* et log *cd*, il vient finalement

$$\log abcd = \log a + \log b + \log c + \log d.$$

417. — **Propriété II.** — ***Le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende diminué du logarithme du diviseur.***

Considérons le quotient $\frac{a}{b}$ que nous désignerons par c.

Par définition du quotient on a :

$$a = bc,$$

et, par suite, d'après la *propriété I*,

$$\log a = \log b + \log c.$$

On en tire :

$$\log c = \log a - \log b,$$

ou

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

418. — Corollaire. — ***Le logarithme d'un nombre varie dans le même sens que ce nombre.***

Car si on a :

$$a > b,$$

on en conclut :

$$\frac{a}{b} > 1.$$

$\frac{a}{b}$ étant un nombre plus grand que 1, son logarithme (n° **411**) est positif. On a donc :

$$\log \frac{a}{b} > 0$$

ou

$$\log a - \log b > 0$$

et, enfin,

$$\log a > \log b.$$

Donc des deux nombres a et b, c'est le plus grand a qui a le plus grand logarithme.

Ainsi, dans le système des logarithmes vulgaires, le logarithme de 10 est égal à 1, et le logarithme de 1 est 0. Donc, si a est un nombre compris entre 1 et 10

$$1 < a < 10,$$

son logarithme est compris entre 0 et 1

$$\log 1 < \log a < \log 10$$

ou

$$0 < \log a < 1.$$

419. — Propriété III. — ***Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au produit du logarithme de ce nombre par l'exposant de la puissance.***

Considérons d'abord a^4. On a, par définition de la puissance (n° **45**) :

$$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a.$$

Donc, en vertu de la *propriété I*,

$$\log a^4 = \log a + \log a + \log a + \log a = 4 \log a.$$

Plus généralement, on a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots . a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Par suite,

$$\log a^n = \underbrace{\log a + \log a + \log a + \ldots . + \log a}_{n \text{ fois}}$$

ou, finalement,

$$\log a^n = n \cdot \log a.$$

420. — Propriété IV. — ***Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au quotient du logarithme de ce nombre par l'indice du radical.***

Soit a un nombre positif. Par définition (n° 4), on appelle racine $m^{ième}$ de ce nombre, et on désigne par $\sqrt[m]{a}$, le nombre b dont la puissance $m^{ième}$ est a. Ainsi l'égalité

$$b = \sqrt[m]{a}$$

équivaut à celle-ci :

$$b^m = a.$$

On en conclut, d'après la *propriété* III,

$$\log b^m = m \log b = \log a$$

et, par suite,

$$\log b = \frac{1}{m} \log a$$

ou

$$\log \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \log a.$$

Par exemple,

$$\log \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log 3,$$

$$\log \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3} \log 4.$$

421. — Table de logarithmes. — Rappelons tout

d'abord que le logarithme décimal d'un nombre compris entre 1 et 10 est un nombre compris entre 0 et 1 (n° **418**). Il en résulte que sa *partie entière* est toujours 0.

On a, alors, dressé une table qui donne les logarithmes des nombres de 1 à 10 de centième en centième; c'est-à-dire que cette table donne les logarithmes de 1; 1,01; 1,02; 1,03; etc., jusqu'à 9,98 et 9,99.

Mais, comme la partie entière est toujours *zéro*, on se contente de mettre dans la table les chiffres qui constituent la partie décimale, qu'on appelle la *mantisse*.

Nous donnons à la fin du volume (pages 426 et 427) une table de logarithmes à 4 décimales.

Voici comment elle est disposée.

D'abord, pour simplifier l'écriture, on ne marque pas la virgule du nombre.

La table est à *double entrée*.

Les deux premiers chiffres du nombre, où on a supprimé la virgule, se trouvent inscrits dans la première colonne de gauche, en tête de laquelle se trouve la lettre **N**.

Le troisième chiffre est en tête de l'une des colonnes suivantes.

Supposons, par exemple, qu'on cherche le logarithme du nombre 3,57.

On supprime la virgule, ce qui donne 357.

On cherche dans la colonne de gauche **N** le nombre *35* (Voir page 42[illegible]).

La mantisse du logarithme cherché se trouve à l'intersection de la ligne horizontale correspondante et de la colonne verticale en tête de laquelle se trouve le troisième chiffre **7**.

On trouve ainsi 5 527. On a donc :

$$\log 3{,}57 = 0{,}5\,527.$$

Cherchons de même le logarithme de 4,6. Comme il n'y a que deux chiffres, nous complétons par un zéro et nous cherchons le logarithme de 4,60.

En supprimant la virgule, nous avons 460.

La mantisse du logarithme cherché se trouve (page 426) à l'intersection de la ligne horizontale à gauche de laquelle se trouve **46**, dans la colonne **N**, et de la colonne en tête de laquelle se trouve le chiffre **0**. Nous trouvons ainsi 6628, on a donc :

$$\log 4{,}6 = 0{,}6628.$$

422. — Table d'antilogarithmes. — L'antilogarithme d'un nombre a est le nombre qui admet a comme logarithme.

La table qui se trouve à la fin du volume (pages 428 et 429) donne les antilogarithmes des nombres de 0 à 1, de millième en millième; c'est-à-dire des nombres 0; 0,001; 0,002; 0,003; etc...., jusqu'à 0,998 et 0,999, avec quatre chiffres, soit trois décimales.

Comme la partie entière du logarithme est toujours 0, on ne l'inscrit pas dans la table.

De même, la virgule de l'antilogarithme n'est pas figurée.

La disposition est à *double entrée* comme pour les logarithmes.

Les deux premiers chiffres de la mantisse du logarithme donné sont inscrits dans la colonne de gauche en tête de laquelle se trouve la lettre **L**. Le troisième chiffre est en tête des colonnes suivantes.

Cherchons, par exemple, le nombre dont le logarithme est 0,663, c'est-à-dire l'antilogarithme de 0,663.

La mantisse est 663.

Dans la colonne **L** (page 429) nous cherchons le nombre **66**.

L'antilogarithme cherché se trouve à l'intersection de la ligne horizontale correspondante et de la colonne en tête de laquelle se trouve le chiffre **3**.

Nous trouvons ainsi 4603.

Le nombre cherché est 4,603.

De même, cherchons le nombre dont le logarithme est 0,047.

La mantisse est ici 047.

Le nombre cherché se trouve (page 428) à l'intersection de la ligne horizontale à gauche de laquelle se trouve **04**, dans la colonne **L**, avec la colonne en tête de laquelle se trouve le chiffre **7**.

On trouve ainsi 1114.

Le nombre cherché est donc 1,114.

423. — Nombres plus grands que 10. — Les tables ne nous ont donné jusqu'ici que les logarithmes des nombres de 1 à 10. Elles permettent cependant d'avoir les logarithmes de *tous* les nombres positifs.

Pour cela, nous ferons une remarque préliminaire *fondamentale* :

Le logarithme décimal d'une puissance de 10 *est égal à l'exposant de cette puissance.*

En effet, d'après la *propriété III* (n° **419**), on a :

$$\log 10^n = n \cdot \log 10 = n,$$

puisque
$$\log 10 = 1.$$

Cela étant, considérons un nombre plus grand que 10, 452 par exemple. On peut écrire

$$452 = 100 \times 4,52.$$

Donc (*propriété I*, n° **415**)

$$\log 452 = \log 10^2 + \log 4,52$$

et
$$\log 452 = 2 + \log 4,52.$$

On est ramené à chercher le logarithme de 4,52 qui est compris entre 1 et 10. La table donne :

$$\log 4,52 = 0,6551.$$

Donc :

$$\log 452 = 2 + 0,6551 = 2,6551.$$

La partie entière 2 est ce qu'on appelle la *caractéristique*. La partie décimale 6551 est la *mantisse*.

424. — D'une façon plus générale, un nombre quelconque plus grand que 10 peut être considéré comme le produit d'une puissance de 10 par le nombre obtenu en reculant la virgule à la droite du premier chiffre.

L'exposant de la puissance de 10 est égal au nombre des rangs dont on a reculé la virgule, c'est-à-dire au *nombre des chiffres de la partie entière moins un*.

Ainsi :

$$21{,}7 = 10 \times 2{,}17,$$
$$3580 = 10^3 \times 3{,}58,$$
$$45900 = 10^4 \times 4{,}59.$$

On appelle* caractéristique *d'un logarithme positif la partie entière du logarithme.

Il résulte de ce qui précède que la caractéristique est égale à l'exposant de la puissance de 10 mise en facteur.

Par suite :

Ainsi :

$$\log 21{,}7 = 1 + \log 2{,}17,$$
$$\log 3580 = 3 + \log 3{,}58,$$
$$\log 45900 = 4 + \log 4{,}59.$$

La caractéristique du logarithme d'un nombre plus grand que 1 est égale au nombre des chiffres de sa partie entière moins un.

La mantisse est ensuite la même que celle du nombre compris entre 1 et 10 obtenu en reculant la virgule.

425. — **Nombres plus petits que 1. Caractéristiques négatives.** — Remarquons tout d'abord que *le logarithme de l'inverse d'une puissance de 10 est égal à l'exposant changé de signe.*

On a en effet (n° **409**) :

$$\log \frac{1}{10^n} = -\log 10^n = -n.\log 10 = -n.$$

Cela étant, considérons un nombre quelconque plus petit que 1, par exemple 0,0657; on peut l'écrire :

$$0,0657 = \frac{1}{10^2} \times 6,57.$$

On a donc :

$$\log 0,0657 = \log \frac{1}{10^2} + \log 6,57$$

et, par suite,

$$\log 0,0657 = -2 + \log 6,57.$$

Le logarithme de 6,57 est donné par la table, il est égal à 0,8176. On a donc :

$$\log 0,0657 = -2 + 0,8176.$$

On pourrait effectuer cette différence; mais, pour la commodité des calculs, *on se garde bien de le faire.*

Cependant, pour abréger l'écriture on écrit ceci :

$$\log 0,0657 = \bar{2},8176,$$

en surmontant 2 d'un trait.

— 2 est encore ce qu'on appelle la *caractéristique* et 8176 est la *mantisse.*

426. — Plus généralement, tout nombre plus petit que 1 peut être considéré comme le produit d'un nombre compris entre 1 et 10, obtenu en reculant la virgule à la droite du premier chiffre *significatif* de la partie décimale, et de l'inverse d'une puissance de 10.

L'exposant de la puissance de 10 est égal au nombre des rangs dont on a reculé la virgule, c'est-à-dire *au nombre des zéros situés à gauche, y compris celui qui se trouve avant la virgule.*

Ainsi on a :

$$0,257 = \frac{1}{10} \times 2,57,$$

$$0,0031 = \frac{1}{10^3} \times 3,1,$$

$$0,0000493 = \frac{1}{10^5} \times 4,93.$$

Il résulte de là que le logarithme d'un nombre plus petit que 1 est la somme : *d'un nombre entier négatif qu'on appelle la* **caractéristique** *et d'un nombre positif plus petit que 1 dont la partie décimale est appelée* **mantisse**.

Par exemple :

$$\log 0{,}257 = \log \frac{1}{10} + \log 2{,}57 = -1 + \log 2{,}57,$$

$$\log 0{,}0031 = \log \frac{1}{10^3} + \log 3{,}1 = -3 + \log 3{,}1,$$

$$\log 0{,}0000493 = \log \frac{1}{10^5} + \log 4{,}93 = -5 + \log 4{,}93.$$

La caractéristique du logarithme d'un nombre plus petit que 1 est un nombre entier négatif dont la valeur absolue est égale au nombre des zéros situés à gauche du premier chiffre significatif de la partie décimale, y compris le zéro qui est à gauche de la virgule.

La mantisse est la même que celui du nombre compris entre 1 et 10 obtenu en reculant la virgule.

Ainsi on a, d'après les tables :

$$\log 2{,}57 = 0{,}4099,$$
$$\log 3{,}10 = 0{,}4914,$$
$$\log 4{,}93 = 0{,}6928.$$

On a donc :

$$\log 0{,}257 = -1 + 0{,}4099 = \bar{1}{,}4099,$$

$$\log 0{,}0031 = -3 + 0{,}4914 = \bar{3}{,}4914,$$

$$\log 0{,}0000493 = -5 + 0{,}6928 = \bar{5}{,}6928,$$

en employant l'écriture abrégée.

427. — Remarque. — Nous avons toujours supposé jusqu'ici, dans les exemples traités, que le nombre obtenu par suppression de la virgule dans le nombre donné avait au plus *trois* chiffres.

Lorsque le nombre donné a plus de trois chiffres on ne considère *que les trois premiers*.

Cela revient à faire une approximation.

Ainsi, si je considère le nombre 25,238, je puis dire que 25,2 en est une *valeur approchée*. Je chercherai donc le logarithme de 25,2 qui sera une valeur approchée du logarithme de 25,238.

Il ne faut pas perdre de vue, en effet, que les calculs logarithmiques ne sont que des *calculs approchés*, mais généralement très suffisants dans la pratique courante. Cependant, lorsque le premier des chiffres que l'on néglige est plus grand que 5 il sera bon de *forcer* le dernier chiffre conservé *d'une unité*.

Ainsi on prendra pour valeur approchée de 5,7381 le nombre 5,74 qui est approché *par excès*, mais plus approché que 5,73.

428. — Résumé. — Tout ce que nous venons de dire sur la recherche du logarithme d'un nombre positif se résume alors dans la règle suivante :

Règle. — *Pour trouver le logarithme d'un nombre positif :*

1° *On calcule la* **caractéristique**.

Si le nombre est plus grand que 1, *la caractéristique est positive et égale au nombre des chiffres de la partie entière diminué de* 1.

Si le nombre est plus petit que 1, *la caractéristique est négative et égale, en valeur absolue, au nombre des zéros situés à gauche du premier chiffre significatif de la partie décimale, y compris le zéro à gauche de la virgule.*

2° *On cherche la* **mantisse**.

Pour cela on supprime dans le nombre la virgule. Si le nombre obtenu a plus de trois chiffres on ne conserve que les trois premiers. Si le nombre a moins de trois chiffres on complète à trois par des zéros à droite. On trouve alors la mantisse dans la table comme il a été dit au n° **421**.

En appliquant cette règle on a :

$$\log 31{,}7 = 1{,}5011, \qquad \log 4{,}253 = 0{,}6284,$$
$$\log 0{,}317 = \bar{1}{,}5011, \qquad \log 2878 = 3{,}4594,$$
$$\log 0{,}00317 = \bar{3}{,}5011, \qquad \log 2 = 0{,}3010,$$
$$\log 425{,}3 = 2{,}6284, \qquad \log 0{,}02 = \bar{2}{,}3010.$$

Remarquons, sur ces exemples, que *deux nombres qui ne diffèrent*

que par la place de la virgule ont même mantisse du logarithme.

Pour le logarithme de 2878 nous avons cherché la mantisse de 288 en forçant le chiffre 7 d'une unité, d'après la Remarque faite plus haut (n° **427**).

429. — Problème inverse. — Il nous est facile maintenant de traiter dans toute sa généralité le problème inverse : *Trouver un nombre, connaissant son logarithme.*

La mantisse donne les chiffres qui composent le nombre.

La caractéristique indique la place de la virgule.

Il nous suffira d'énoncer la règle qui s'explique d'elle-même.

Règle. — ***Pour trouver un nombre, connaissant son logarithme :***

1° On cherche ses chiffres.

Pour cela on considère la mantisse qu'on ramène à n'avoir que trois chiffres, en supprimant ceux qu'il peut y avoir de trop à droite. La table d'antilogarithmes donne alors les chiffres du nombre cherché comme il a été dit n° 422.

2° On place la virgule.

Si la caractéristique est positive on sépare, par une virgule, un nombre de chiffres à gauche égal à la caractéristique augmentée de 1.

Si la caractéristique est négative, on écrit un nombre de zéros à gauche égal à la valeur absolue de la caractéristique et on sépare le premier zéro par une virgule.

L'application de cette règle donne :

$$\log x = 3{,}452, \quad \text{donc} \quad x = 2831,$$
$$\log y = \bar{2}{,}781, \quad \text{donc} \quad y = 0{,}06039,$$
$$\log z = 0{,}123, \quad \text{donc} \quad z = 1{,}327.$$

Supposons encore que l'on ait :

$$\log u = \bar{5}{,}6928.$$

Nous supprimons le dernier chiffre 8, mais nous *forçons* le précédent d'une unité (n° **427**), l'antilogarithme de $\bar{5}{,}693$ donne :

$$u = 0{,}00004932$$

Soit enfin, $$\log t = \bar{1}{,}4099.$$

Nous cherchons l'antilogarithme de $\bar{1}{,}410$ et nous trouvons :

$$t = 0{,}2570.$$

430. — Applications des logarithmes. — L'emploi des logarithmes peut servir à faire très rapidement les calculs suivants : *multiplications, divisions, élévations aux puissances, extractions de racines.*

Mais il ne faut pas oublier que ces calculs ne sont que des calculs approchés qui ne fournissent que trois chiffres significatifs avec les tables à quatre décimales que nous employons.

Pour avoir une plus grande approximation, il faudrait employer des tables plus complètes à 5, 7 ou 8 décimales.

431. — Produits. — Pour effectuer un produit on s'appuie sur la *propriété I* (n° **415**).

On calcule les logarithmes des facteurs et on fait la somme de ces logarithmes. On a ainsi le logarithme du produit et pour avoir ce produit lui-même on n'a qu'à faire le problème inverse (n° **429**).

EXEMPLE. — *Soit à calculer le produit :*

$$x = 423 \times 0{,}0082 \times 0{,}743 \times 36{,}17.$$

On a :

$$\begin{aligned} \log 423 &= 2{,}6263 \\ \log 0{,}0082 &= \bar{3}{,}9138 \\ \log 0{,}743 &= \bar{1}{,}8710 \\ \log 36{,}17 &= 1{,}5587 \end{aligned}$$

Somme : $\log x = 1{,}9698.$

Nous cherchons l'antilogarithme de 1,970, et nous trouvons

$$x = 93{,}33.$$

On a ici à faire une *somme de logarithmes*. Comme il y a des logarithmes à caractéristiques négatives, on fait une somme algébrique.

Les mantisses étant toutes *positives*, on fait la somme *arithmétique* des mantisses et la somme *algébrique* des caractéristiques en leur ajoutant la partie entière provenant des mantisses.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on a fait la somme *arithmétique* des mantisses; ce qui a donné 9698 pour partie décimale et 2 pour partie entière.

On a fait ensuite la somme *algébrique*

$$2+2-3-1+1=1$$

de cette partie entière et des caractéristiques.

432. — **Cologarithmes.** — Lorsqu'on cherche le logarithme d'un quotient $\frac{a}{b}$, on a à faire une *différence* de logarithmes : $\log a - \log b$, opération plus compliquée qu'une addition. Pour éviter cette soustraction on peut écrire

$$\log \frac{a}{b} = \log a + \log \frac{1}{b}.$$

On serait ainsi ramené à une addition, si on connaissait $\log \frac{1}{b}$. C'est là la raison de l'emploi des *cologarithmes*.

On appelle* cologarithme *d'un nombre le logarithme de l'inverse de ce nombre.

Or, on a :

$$\operatorname{colog} a = \log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a,$$

donc

$$\operatorname{colog} a = -\log a,$$

puisque

$$\log 1 = 0.$$

Le cologarithme d'un nombre est égal à son logarithme changé de signe; mais il faut mettre ce cologarithme so *la forme ordinaire* d'un logarithme.

Or, un logarithme ordinaire est de la forme $c+m$; c étant la caractéristique, c'est-à-dire un nombre *entier* positif ou négatif et m un nombre *positif plus petit que* 1.

Si donc

$$\log x = c + m,$$

on a :

$$\operatorname{colog} x = -c - m.$$

Ceci s'écrit :

$$\operatorname{colog} x = -(1+c) + 1 - m,$$

$-(1+c)$ est *entier* positif ou négatif, $1-m$ est *positif et plus petit que* 1. Donc $-(1+c)$ est la *caractéristique* et $1-m$ la *mantisse*.

Soit, par exemple,

$$\log x = 3,2894$$

on a : $c = 3, \quad m = 0,2894,$

donc $-(1+c) = -4,$

$$1 - m = 1 - 0,2894 = 0,7106.$$

On remarque que, pour avoir $1-m$, il faut prendre les compléments à 9 de tous les chiffres de 0,2894, sauf du dernier à droite dont on prend le complément à 10.

D'où la règle suivante :

Règle. — ***Le cologarithme d'un nombre a pour caractéristique le nombre obtenu en augmentant la caractéristique du logarithme d'une unité et en changeant le résultat de signe.***

La mantisse du cologarithme s'obtient en prenant les compléments à 9 de tous les chiffres de la mantisse du logarithme, sauf pour le dernier chiffre significatif à droite dont on prend le complément à 10. Si à droite du dernier chiffre significatif il y a des zéros, on les recopie.

Exemple. — On a :

$$\log 7,05 = 0,8482,$$
$$\log 0,0705 = \bar{2},8482,$$
$$\log 0,2 = \bar{1},3010,$$
$$\log 423 = 2,6263.$$

On en déduit :

$$\operatorname{colog} 7,05 = \bar{1},1518,$$
$$\operatorname{colog} 0,0705 = 1,1518,$$
$$\operatorname{colog} 0,2 = 0,6990,$$
$$\operatorname{colog} 423 = \bar{3},3737.$$

433. — **Quotient.** — D'après ce qui précède, le logarithme d'un quotient est égal à la somme du logarithme

du dividende et du cologarithme du diviseur. Ceci donne le logarithme du quotient d'où on tire la valeur du quotient lui-même.

Exemple. — Soit à calculer le quotient

$$x = \frac{4,86}{0,0732}.$$

On a :

$$\begin{array}{r} \log 4,86 = 0,6866 \\ \underline{\text{colog}\, 0,0732 = 1,1355} \\ \log x = 1,8221 \end{array}$$

En se reportant à la table des antilogarithmes, on trouve :

$$x = 66,37.$$

Le calcul du cologarithme de 0,0732 a été fait *à vue*, sans écrire le logarithme. C'est ce qu'il faut faire pour la rapidité des calculs. Ainsi, dans ce cas, nous avons d'abord calculé la caractéristique en disant : la caractéristique du logarithme serait -2, donc celle du cologarithme est $-(-2+1) = +1$. Ceci se fait de tête, et on écrit la caractéristique. Ensuite, pour la mantisse, on écrit à vue les compléments à 9 des chiffres de la mantisse *inscrite dans la table*. On applique donc la règle précédente *sur la table*, sans se donner la peine de recopier inutilement la mantisse du logarithme.

434. — Puissance. — D'après la *propriété III* (n° **419**), il est facile de calculer une puissance d'un nombre quelconque. Pour cela, on calcule le logarithme du nombre, on le multiplie par l'exposant et on a ainsi le logarithme de la puissance que l'on obtient ensuite par la table d'antilogarithmes.

Exemple. — Soit à calculer :

$$x = (2,51)^5.$$

On a :

$$\log 2,51 = 0,3997,$$

$$\log x = 5 \cdot \log 2,51 = 1,9985;$$

d'où

$$x = 99,54.$$

435. — Produit d'un logarithme par un nombre. — On a ici à faire le produit d'un logarithme par un nombre. Cette opération ne présente aucune difficulté lorsque

la caractéristique est positive; mais, lorsque la caractéristique est négative, il ne faut pas oublier que le logarithme est une somme *algébrique*.

EXEMPLE. — Soit à calculer :

$$x = (0,75)^8$$

on a

$$\log 0,75 = \bar{1},8751.$$

Pour multiplier le logarithme par 8, nous aurons soin de nous rappeler qu'il est égal à $-1 + 0,8751$. Le produit est donc égal à

$$-8 + 0,8751 \times 8 = -8 + 7,0008 = -1 + 0,0008.$$

On a donc :

$$\log x = \bar{1},0008;$$

d'où

$$x = 0,1.$$

436. — **Racine.** — D'après la *propriété IV* (nº **420**), il est facile de calculer une racine quelconque d'un nombre. A cet effet, on calcule le logarithme du nombre, on le divise par l'indice du radical et on a ainsi le logarithme de la racine que l'on obtient ensuite par la table d'antilogarithmes.

EXEMPLE. — *Soit à calculer :*

$$x = \sqrt[7]{200}.$$

On a :

$$\log 200 = 2,3010.$$

Donc

$$\log x = \frac{1}{7} \log 200 = 0,3287;$$

et on a x en cherchant l'antilogarithme de 0,329, ce qui donne :

$$x = 2,133.$$

437. — **Quotient d'un logarithme par un nombre entier**. — Le calcul précédent conduit à diviser un logarithme par un nombre entier Cette opération ne présente aucune difficulté lorsque la caractéristique est positive; mais quelques précautions sont nécessaires lorsque la caractéristique est négative, afin que le quotient ait encore la *forme ordinaire d'un logarithme*.

Supposons que l'on ait :

$$\log a = -c + m,$$

$-c$ étant la caractéristique négative et m un nombre compris entre 0 et 1. On aura :

$$\log \sqrt[p]{a} = \frac{1}{p} \cdot \log a = \frac{-c+m}{p}.$$

Pour mettre $\frac{-c+m}{p}$ sous la forme ordinaire d'un logarithme, cherchons le plus petit multiple de p supérieur à c. Soit pk ce multiple, on aura :

$$c = pk - r,$$

r étant plus petit que p. On en conclut :

$$\log \sqrt[p]{a} = \frac{-c+m}{p} = \frac{-pk+r+m}{p} = -k + \frac{r+m}{p}.$$

k étant entier et $\frac{r+m}{p}$ étant positif plus petit que 1 puisque $r+m<p$, $-k$ est la caractéristique et $\frac{r+m}{p}$ la mantisse. On en conclut la règle que voici :

Pour diviser un logarithme, à caractéristique négative, par un nombre entier, on cherche d'abord le multiple de ce nombre entier immédiatement supérieur ou égal à la valeur absolue de la caractéristique. Le quotient, changé de signe, de ce multiple par le diviseur est la caractéristique cherchée.

On ajoute, ensuite, l'excès du multiple considéré sur la caractéristique à la mantisse du logarithme donné. Le quotient de cette somme par le diviseur est la mantisse cherchée.

Exemple. — Soit à calculer :

$$x = \sqrt[5]{0,03}.$$

On a : $$\log 0,03 = \bar{2},4771.$$

Donc $$\log x = \frac{1}{5} \log 0,03 = \frac{1}{5}(\bar{2},4771)$$

$$= \frac{1}{5}(-5+3,4771) = -1 + \frac{3,4771}{5};$$

d'où $$\log x = \bar{1},695;$$
$$x = 0,4955.$$

438. — Application. — Les logarithmes permettent de calculer aisément une valeur approchée de la valeur numérique d'un monôme quelconque.

EXEMPLE. — *Calculer la valeur numérique du monôme*

$$x = \frac{4a^3bc^2}{\sqrt[4]{7 \cdot d}}$$

pour $a = 0,271$, $b = 6,15$, $c = 44,82$, $d = 0,059$.

On a : $7d = 0,413$.

Les tables donnent :

$$\log 4 = 0,6021,$$
$$\log a = \bar{1},4330,$$
$$\log b = 0,7889,$$
$$\log c = 1,6513,$$
$$\log 7d = \bar{1},6160,$$
$$\text{colog } 7d = 0,3840.$$

Or, on a :

$$\log x = \log 4 + 3 \log a + \log b + 2 \log c + \frac{1}{4} \text{colog } 7d.$$

Effectuons la somme indiquée dans le second membre et nous trouvons :

$$\log 4 = 0,6021$$
$$3 \log a = \bar{2},2990$$
$$\log b = 0,7889$$
$$2 \log c = 3,3026$$
$$\frac{1}{4} \text{col } 7d = 0,0960$$
$$\overline{\log x = 3,0886}$$

L'antilogarithme de 3,089 donne :

$$x = 1227.$$

439. — Tables à cinq décimales. — Tout ce que nous venons de dire pour les logarithmes à quatre décimales, s'applique sans modifications aux tables à cinq, sept, huit décimales. Nous nous contenterons de donner quelques indications sur les tables à cinq décimales.

Elles donnent les mantisses des logarithmes des nombres de 4 chiffres depuis 1000 jusqu'à 9999 ou, ce qui

revient au même, des nombres de 1 à 10 de millième en millième : de 1, 1,001, 1,002, jusqu'à 9,999.

Nous avons reproduit à la page 425 l'une des pages de la table de Bouvart et Ratinet, éditée par la librairie Hachette et Cie. Chaque page constitue une table à *double entrée.*

Dans la première colonne de gauche N, se trouvent inscrits les 3 premiers chiffres du nombre; le quatrième chiffre est en tête d'une des colonnes suivantes.

Une première remarque s'impose immédiatement.

Un grand nombre de mantisses consécutives commencent toutes par les mêmes *deux premiers chiffres.*

Pour économiser la place on convint alors de ne pas répéter les deux premiers chiffres qu'on n'indique qu'une seule fois dans la colonne **0**.

Ainsi dans la page 425, toutes les mantisses des logarithmes de 6500 jusqu'à 6606 commencent par les deux chiffres 8 1. Ces deux chiffres n'ont été écrits qu'une seule fois dans la colonne **0**; et il faut supposer que toutes les mantisses inscrites dans les lignes **650** jusqu'à **660**, sont précédées de ces deux chiffres.

De même les deux premiers chiffres du nombre ne sont pas reproduits tant qu'ils ne changent pas.

Il arrive cependant généralement que le changement des deux premiers chiffres de la mantisse se fait au milieu d'une ligne. Dans ce cas, à l'endroit où commence le changement, on a mis une astérisque aux mantisses. Cette astérisque indique que les deux premiers chiffres de la mantisse ne sont pas les deux chiffres *précédents*, mais les deux chiffres *suivants*.

Exemples. — *Soit à trouver le logarithme de* 65,27.

La mantisse se trouve à l'intersection de la ligne horizontale à gauche de laquelle est inscrit **652** et de la colonne en tête de laquelle se trouve le chiffre 7. En ce point se trouve 471. Ce sont les trois der-

niers chiffres. Les deux premiers sont 81 inscrits dans la colonne 0. La mantisse complète est 81471, et on a :

$$\log 65,27 = 1,81471.$$

Soit à trouver le logarithme de 0,6764.

A l'intersection de la ligne à gauche de laquelle se trouve 676 (colonne N) et de la colonne 4 on trouve *020, Les trois derniers chiffres de la mantisse sont donc : 020. Mais, comme devant 020 il y a une astérisque, cela veut dire que les deux premiers chiffres sont les deux chiffres 83 placés en face de la ligne *suivante* dans la colonne 0, et non pas les deux chiffres 82 précédents. La mantisse complète est donc 83020, et on a :

$$\log 0,6764 = \bar{1},83020.$$

440. — Emploi des tables de parties proportionnelles. — Supposons qu'on veuille calculer le logarithme de 6,6358. D'après ce que nous avons dit plus haut, ce logarithme sera compris entre le logarithme de 6,635 et celui de 6,636. La mantisse correspondant à 6635 sera une valeur approchée par défaut et celle relative à 6636 sera une valeur approchée par excès. Pour calculer avec plus d'approximation la mantisse correspondante à 66358, on se sert du principe suivant :

La variation de la mantisse est sensiblement proportionnelle au dernier chiffre.

La mantisse de 6635 ou 66350 est, d'après la table (p. 425), 82184. Celle de 6636 ou 66360 est 82191. On voit donc que quand le nombre augmente de 10 unités, la mantisse augmente de 7 unités. Par suite, d'après le principe précédent, lorsque le nombre augmente de 1 unité la mantisse augmente de $\frac{7}{10} = 0,7$ et lorsque le nombre augmente de 8 unités la mantisse augmente de $8 \times 0,7 = 5,6$.

La mantisse de 66358 est donc égale à celle de 66350 augmentée de 5,6, soit :

$$82184 + 5,6 = 82189,6.$$

En fait, on réduit toujours la mantisse à avoir *cinq*

chiffres, dans ces conditions on *néglige* le chiffre après la virgule.

Toutefois, si ce chiffre est plus grand que 5, on force le cinquième chiffre d'une unité.

Ainsi dans l'exemple précédent, le chiffre après la virgule est 6. On l'efface, et comme il est plus grand que 5, on force le cinquième chiffre d'une unité. La mantisse cherchée est alors, avec cinq chiffres, 82190.

Pour éviter au calculateur d'avoir à faire le produit $8 \times 0,7$, ce produit est inscrit tout calculé dans une petite table additionnelle placée en marge. Ainsi (page 425), dans la marge de la table nous trouvons le petit tableau

	7
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

qui donne les produits de 0,7, par 1, 2, 3... 9

Voici alors comment on dispose le calcul

pour	6 635	....	82184
pour	8	....	5,6
log	6,6358	=	0,82190

Exemple. — *Soit à calculer* log 683,27.

pour	6832	.....	83455
pour	7		4,2
log	(683,27)	=	2,83459

Ici la mantisse de 6832 est 83455. Par une soustraction facile effectuée *sur la table* on voit que l'excès de la mantisse suivante 83461 sur celle-ci est 6. Dans la petite table 6 en marge on trouve en regard de 7, le produit 4,2.

La caractéristique 2 se calcule comme d'ordinaire.

441. — Problème inverse. — Dans les tables à cinq décimales il n'y a pas de tables d'antilogarithmes. Dans

ces conditions, pour calculer un nombre, connaissant son logarithme, il faudra se servir de la *table des logarithmes* en sens inverse.

Supposons qu'il s'agisse de calculer le nombre x tel que

$$\log x = 2,83184.$$

Nous chercherons dans la table *de logarithmes*, dans la colonne **0**, les deux premiers chiffres 83 de la mantisse. Puis, dans les lignes suivantes, le plus grand nombre de trois chiffres contenu dans 184. Le nombre correspondant donnera les chiffres du nombre x avec *quatre* figures.

Nous trouvons ainsi (page 425) que le plus grand nombre contenu dans 184 est 181. En d'autres termes, la plus grande mantisse contenue dans 83184 est 83181 qui est celle de 6789. Il en résulte que 678,9 est une valeur approchée de x par défaut.

Pour avoir un chiffre de plus, nous appliquerons la méthode des parties proportionnelles.

La différence entre 83181 et la mantisse suivante 83187 dans la table est 6. Puisque, pour un accroissement de 10 unités du cinquième chiffre, la mantisse croît de 6 unités, pour un accroissement de 1 unité du cinquième chiffre, la mantisse augmentera de $\frac{6}{10} = 0,6$. Or, la différence entre la mantisse du logarithme de 67890 qui est 83181 et la mantisse du logarithme de x qui est 83184 est 3. Donc le cinquième chiffre de x sera égal au nombre de fois que 0,6 est contenu dans 3, ce qui est 5.

Pratiquement, pour diviser 3 par 0,6, on se sert de la table en marge et on cherche le plus grand multiple de 0,6 contenu dans 3. Ici c'est exactement 5. Donc :

$$x = 678,95.$$

On dispose alors les calculs ainsi :

$$\log x = 2{,}83184$$

pour	83181	......	6789
diff.	3		
pour	3	....	5
			$x = 678{,}95$

Exemples. — *Soit à calculer le nombre x tel que :*

$$\log x = \bar{2}{,}81769.$$

pour	81763	......	6571
diff.	6		
pour	5,6	....	9
			$x = 0{,}065719.$

Soit encore à calculer x tel que :

$$\log x = 0{,}82095.$$

pour	82092	......	6621
diff.	3		
pour	2,8	....	4
			$x = 6{,}6214.$

442. — Exercice. — *Calculer le rayon d'une sphère de 1543 litres de volume.*

Soit x le rayon de la sphère en *décimètres*, on aura :

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = 1543,$$

d'où
$$x = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1543}{4\pi}}.$$

On a : $\pi = 3{,}1416.$

les tables donnent :

$$\log 3 = 0{,}47712,$$
$$\log 1543 = 3{,}18837,$$
$$\log 4 = 0{,}60206.$$

Calculons $\log \pi$:

pour	3141	....	49707
pour	6		8,4
			$\log \pi = 0{,}49715.$

On a alors :

$$\begin{array}{rl} \log 3 = & 0,47712 \\ \log 1543 = & 3,18837 \\ \text{colog } 4 = & \bar{1},39794 \\ \text{colog } \pi = & \bar{1},50285 \\ \hline 3 \log x = & 2,56628 \\ \log x = & 0,85542 \end{array}$$

pour 85540 7168

diff. 2

pour ....1,8..........3

$x = 7,1683$

Le rayon calculé est donc de $7^{dm},1683$, ou de $0^{m},71683$.

§ 4. — Intérêts composés.

443. — Intérêt simple. — Rappelons d'abord, en quelques mots, ce que c'est que l'intérêt simple dont il a été parlé en arithmétique[1].

Lorsque le possesseur d'une certaine somme d'argent en cède momentanément la jouissance à une autre personne, il reçoit de cette personne, à titre de loyer ou de rémunération, une certaine somme appelée *intérêt*.

On dit que la somme d'argent est *prêtée* ou *placée*, et cette somme prend le nom de *capital*.

D'après les conventions généralement admises, *l'intérêt simple est proportionnel au capital et à la durée du placement.*

Le **taux** *de l'intérêt est l'intérêt rapporté par une somme de* 100 *francs au bout d'un an.*

Dire qu'un capital est placé au taux 5 o/o, c'est dire que 100 francs rapportent 5 francs par an.

1. Voir notre *Cours abrégé d'Arithmétique*, livre IV, chap. III, §

444. — Formule de l'intérêt simple. — On démontre en arithmétique[1] que, si l'on désigne par i l'intérêt rapporté par un capital a placé au taux t pendant n années, on a :

$$i = a \cdot \frac{t}{100} \cdot n.$$

n peut être un nombre entier ou fractionnaire.

Posons

$$\frac{t}{100} = r,$$

r est alors l'intérêt de **1** *franc* au bout d'*un an*.

La formule précédente s'écrit alors :

$$(1) \qquad i = arn.$$

En particulier, l'intérêt rapporté par un capital a au bout d'*un* an s'obtient en faisant dans cette formule $n = 1$ et est :

$$(2) \qquad i = ar.$$

445. — Intérêts composés. — *On dit qu'une somme est placée à* **intérêts composés** *lorsqu'à la fin de chaque année les intérêts produits par cette somme sont ajoutés au capital et produisent eux-mêmes intérêt pendant les années suivantes.*

On dit encore que les intérêts sont *capitalisés* à la fin de chaque année.

Par exemple une personne a placé un capital de 1000 francs à 4 o/o. Au bout d'un an le capital a produit 40 francs d'intérêt. La personne ne touche pas ces 40 francs et les ajoute au capital, qui devient alors 1040 francs. Au bout de la seconde année, ce nouveau capital a produit :

$$1040 \times 0{,}04 = 41^{\text{fr}},60$$

d'intérêt. Ces intérêts sont de nouveau ajoutés au capital, qui devient $1081^{\text{fr}},60$. Au bout de la troisième année, l'intérêt du nouveau capital est :

$$1081{,}60 \times 0{,}04 = 43^{\text{fr}},264.$$

1. Voir notre *Cours abrégé d'Arithmétique*, p. 347, n° 815

Et le capital, grossi des intérêts, est devenu :

$$1081,60 + 43,264 = 1124^{fr},864 ;$$

et ainsi de suite.

446 — **Formule générale.** — Soit a un capital placé à intérêts composés au taux t. Posons encore $r = \frac{t}{100}$, r étant l'intérêt de 1 franc en 1 an.

L'intérêt rapporté par le capital a au bout d'*un* an sera (formule (2), n° **444**) ar.

En ajoutant cet intérêt au capital, celui-ci devient :

$$a + ar = a(1 + r).$$

Cette égalité prouve que :

La valeur acquise par un capital au bout d'un an s'obtient en multipliant ce capital par $1 + r$, r étant l'intérêt simple de 1 franc en un an.

Au bout de la première année le capital a est devenu $a(1 + r)$. D'après ce qui précède sa valeur au bout de la seconde année sera

$$a(1 + r)(1 + r) = a(1 + r)^2.$$

On obtient la valeur acquise au bout de la troisième année en multipliant celle-ci par $1 + r$, ce qui donne :

$$a(1 + r)^2(1 + r) = a(1 + r)^3 ;$$

et ainsi de suite.

Pour chaque année de placement on multiplie par $1 + r$. Pour n années de placement on multipliera n fois par $1 + r$, c'est-à-dire par $(1 + r)^n$.

Donc :

La valeur A acquise par un capital a au bout de n années de placement à intérêts composés au taux t est donnée par la formule

$$(3) \qquad A = a(1 + r)^n = a\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n.$$

447. — Calcul pratique. — Pour appliquer cette formule on se servira des logarithmes; on a, en effet :

$$(4) \qquad \log A = \log a + n . \log\left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

C'est la formule de *calcul pratique*.

On voit qu'il faudra multiplier la valeur $\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ par n. Or, si on ne connaissait la valeur de ce logarithme qu'avec 4 ou 5 décimales, en multipliant par n on ferait des erreurs assez grandes dès que n serait un peu grand. Pour cette raison, il est bon d'avoir les valeurs de ce logarithme avec un plus grand nombre de décimales.

Voici un tableau qui donne les valeurs de $\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)$, pour les valeurs usuelles de t, avec 10 décimales.

t	$1 + \frac{t}{100}$	$\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)$
2	1,02	0,0086001718
2 1/4	1,0225	0,0096633167
2 1/2	1,0250	0,0107238654
2 3/4	1,0275	0,0117818305
3	1,03	0,0128372247
3 1/4	1,0325	0,0138900603
3 1/2	1,035	0,0149403498
3 3/4	1,0375	0,0159881054
4	1,04	0,0170333393

Dans le produit $n . \log\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ effectué, grâce à ce tableau, on ne conservera ensuite que les 4 ou 5 premières décimales.

448. — Problème I. — *Un capital de* 1250 *francs est placé pendant* 8 *ans, à intérêts composés, au taux de* 3 1/2 0/0. *Qu'est-il devenu au bout des* 8 *ans?*

Ce capital est devenu :

$$A = 1250 \left(1 + \frac{3,5}{100}\right)^8,$$

et on a (formule (4), n° **330**) :

$$\log A = \log 1250 + 8 . \log 1,035.$$

$$\log 1250 = 3,0969,$$

$$8 \log 1,035 = 0,1195,$$

$$\log A = 3,2164,$$

$$A = 1644 \text{ fr.}$$

449. — Problème II. — *Une propriété d'une valeur de* 5840 *francs avait été enlevée à un fermier pendant la Révolution en* 1793. *Ses héritiers réclament le remboursement de la propriété avec les intérêts capitalisés au taux de* 3 o/o. *Quelle serait la somme due aux héritiers en l'an* 1903?

Le temps du placement serait :

$$n = 1903 - 1793 = 110 \text{ ans.}$$

La somme serait donc donnée par la formule :

$$\log A = \log 5840 + 110 \log 1,03.$$

$$\log 5840 = 3,7664,$$

$$110 \log 1,03 = 1,4121.$$

$$\log A = 5,1785,$$

$$A = 150\,700.$$

La somme due serait de 150 700 francs, environ.

Pour calculer cette somme avec un peu plus d'exactitude, employons les logarithmes à cinq décimales. On a alors :

$$\log 5840 = 3,76641$$

$$110 . \log 1,03 = 1,41209$$

$$\log A = 5,17850$$

pour	17840	......	1508
diff.	...10		
pour	8,7	....	3
			A = 150830

Le capital est donc, avec plus d'exactitude, de 150 830 francs.

450. — Calcul du capital à placer. — De la formule (4) du n° **447**, on tire :

$$\log a = \log A - n \log\left(1 + \frac{t}{100}\right),$$

ou

$$(5) \qquad \log a = \log A + n \operatorname{colog}\left(1 + \frac{t}{100}\right).$$

Cette formule permet de calculer le capital a qu'il faut placer pour obtenir au bout de n années un capital A à intérêts composés au taux t.

451. — Problème III. — *Quelle somme faut-il placer, à intérêts composés au taux* 4 o/o, *pour avoir au bout de* 10 *ans* 100 000 *francs?*

Cette somme est donnée par la formule (5)

$$\log a = \log 100\,000 + 10 \operatorname{colog} 1{,}04,$$
$$\log a = 5 + \bar{1}{,}8297 = 4{,}8297,$$
$$a = 67\,610 \text{ fr.}$$

452. — Calcul du taux. — De la formule (4) du n° **447**, on tire :

$$\log\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{\log A - \log a}{n},$$

ou

$$(6) \qquad \log\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{\log A + \operatorname{colog} a}{n}.$$

Cette formule permet de calculer le taux t auquel il faut placer un capital a pour qu'il devienne A au bout de n années.

La formule fournit $\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)$, ce qui donne $1 + \frac{t}{100}$, d'où on déduit facilement t.

453. — Problème IV. — *A quel taux faut-il placer* 3 000 *francs pour qu'ils produisent à intérêts composés,* 5 000 *francs en* 15 *ans?*

La formule (6) donne, en y faisant :

$$A = 5000, \quad a = 3000, \quad n = 15,$$

$$\log\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{\log 5000 + \operatorname{colog} 3000}{15}.$$

$$\begin{aligned} \log 5000 &= 3,6990 \\ \operatorname{colog} 3000 &= \bar{4},5229 \\ \hline \text{Somme} &= 0,2219. \end{aligned}$$

Donc

$$\log\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \frac{0,2219}{15} = 0,0146,$$

d'où

$$1 + \frac{t}{100} = 1,035,$$

ce qui donne :

$$t = 3,5 \text{ pour } 100.$$

454. — Calcul du temps. — De la formule (4) du n° **447**, on tire finalement

$$n = \frac{\log A - \log a}{\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)}.$$

ou

(7) $$n = \frac{\log A + \operatorname{colog} a}{\log\left(1 + \frac{t}{100}\right)}.$$

Pour calculer le quotient qui figure dans le second membre, on pourra encore employer les logarithmes.

Il faut remarquer que cette formule (7) peut fort bien ne pas donner pour n une valeur *entière*. Le placement ne serait pas alors un nombre exact d'années entières, mais un certain nombre d'années plus une fraction d'année.

Il semble alors que le problème n'aurait plus de sens.

Il en a un cependant, car *on convient d'appliquer la formule* (4) *dans tous les cas, même lorsque* n *n'est pas entier*

La formule (4) doit donc être considérée comme la formule générale des intérêts composés applicable dans tous les cas, même lorsque le placement n'est pas un nombre entier d'années.

455. — PROBLÈME V. — *Au bout de combien d'années un capital placé à 3 pour 100, à intérêts composés, est-il doublé ?*

Prenons *pour* unité le capital à placer. On aura alors :

$$a = 1, \quad A = 2, \quad t = 3$$

et la formule (7) donne :

$$n = \frac{\log 2 + \text{colog } 1}{\log 1{,}03}.$$

Remarquons que

$$\text{colog } 1 = -\log 1 = 0;$$

on a donc : $$n = \frac{\log 2}{\log 1{,}03} = \frac{0{,}3010}{0{,}0128}.$$

On en conclut :

$$\log n = \log 0{,}3010 + \text{colog } 0{,}0128$$

$$\log 0{,}3010 = \bar{1}{,}4786$$
$$\text{colog } 0{,}0128 = 1{,}8928$$
$$\log n = 1{,}3714 ;$$

d'où $$n = 23{,}5.$$

Il faudra donc placer le capital pendant 23 ans 1/2, c'est-à-dire pendant 23 ans et 6 mois.

Pour avoir un résultat plus exact, nous pourrions employer les tables à cinq décimales :

$$\log 2 = 0{,}30103,$$
$$\log 1{,}03 = 0{,}01284.$$

Donc

$$n = \frac{0{,}30103}{0{,}01284}$$

pour 3010 47857
pour 3 4,2

$\log 0{,}30103 = \bar{1}{,}47861;$

$\log 0{,}01284 = \bar{2}{,}10857.$

D'où

$$\log 0{,}30103 = \bar{1}{,}47861$$
$$\text{colog}\, 0{,}01284 = 1{,}89143$$
$$\log x = 1{,}37004$$

pour 36996 2344
diff. 8
pour 7,2 4

$n = 23{,}444$

Le capital doit être placé $23^a{,}444$. Or, $0^a{,}444$ valent :

$$0{,}444 \times 12 = 5^m{,}328$$

et $0^m{,}328$ valent :

$$0{,}328 \times 30 = 9^j{,}84.$$

Le capital doit donc être placé $23^a\, 5^m\, 10^j$.

EXERCICES

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

523. Trouver trois nombres en progression arithmétique ayant r pour raison, dont la somme égale le produit. Application $r = 1$.

524. Quelle doit être la raison d'une progression arithmétique dont le premier terme est a, pour que la somme des n premiers termes soit égale à an^2?

525. Trouver le premier terme et la raison d'une progression arithmétique sachant que la somme des n premiers termes est, pour toutes les valeurs de n, égale à $n(3n+1)$.

526. Trouver quatre nombres en progression arithmétique connaissant le produit des extrêmes, 22 et le produit des moyens 40.

527. Dans une progression arithmétique dont les deux termes extrêmes sont -5 et $+25$, trouver deux termes équidistants des extrêmes, tels que leur produit soit égal à 36.

528. Trouver p nombres impairs consécutifs dont la somme soit égale à p^3.

529. Quelles sont les progressions arithmétiques commençant par 5, ayant pour raison un nombre entier et comprenant les nombres 57 et 113?

530. Les nombres 12, 20 et 35 peuvent-ils faire partie d'une même progression arithmétique?

531. Un cavalier fait ferrer son cheval des quatre pieds. Le maréchal ferrant lui demande 2 francs par fer ou 1 centime pour le premier clou, 3 centimes pour le deuxième clou, 5 centimes pour le troisième clou et ainsi de suite Chaque fer a 8 clous. Le cavalier doit-il accepter cette dernière proposition?

532. Vérifier que si x, y, z sont en progression arithmétique, il en est de même de

$$x^2+xy+y^2$$
$$x^2+xz+z^2$$
$$y^2+yz+z^2.$$

Trouver le rapport des raisons.

533. Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle, sachant que les trois arêtes issues d'un même sommet sont en progression arithmétique, que la surface totale est de 166 mètres carrés et que la somme des trois arêtes est de 18 mètres.

534. Les trois côtés d'un triangle forment une progression arithmétique dont on donne la raison; on connaît le rapport m de la surface de ce triangle à celle du rectangle construit sur les deux plus petits côtés. Calculer les côtés de ce triangle. Discuter.

535. Calculer le premier terme d'une progression arithmétique, sachant que la raison est r, et que la somme des n premiers termes est égale à $(n+4)$ fois le dernier terme.

Application : $r=3$, $n=25$.

536. Trouver trois nombres en progression arithmétique, tels que leur somme soit égale à a et la somme de leurs carrés à b.

Application : $a=111$; $b=4157$.

537. Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle connaissant le périmètre $3a$ de ce triangle, et sachant que ses côtés forment une progression arithmétique.

538. Lorsque les trois côtés d'un triangle rectangle sont en progression arithmétique, le rayon du cercle inscrit est égal à la raison de cette progression.

539. Si S, S′, S″ sont les sommes de n termes de trois progressions arithmétiques dont les premiers termes sont l'unité et dont les raisons sont respectivement 1, 2, 3, démontrer que l'on a :

$$S+S''=2S'.$$

540. Dans une progression arithmétique les termes de rang m, p, q, sont respectivement a, b, c. Démontrer que l'on a :

$$a(p-q)+b(q-m)+c(m-p)=0.$$

PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES

541. Trois nombres entiers sont en progression géométrique; si le second augmente de 8, la progression devient arithmétique; mais si, alors, le dernier terme augmente de 64, elle redevient géométrique. Trouver les trois nombres.

542. Trois nombres entiers forment une progression géométrique croissante. On diminue le troisième nombre de 16, la progression devient arithmétique. En diminuant alors le second nombre de 2, la suite formée par le premier nombre et les deux autres ainsi modifiés est une progression géométrique croissante. Quels sont ces nombres?

543. Déterminer les côtés d'un triangle connaissant le côté a et sachant que les côtés a, b, c, et la hauteur h abaissée sur le côté a sont en progression géométrique.

544. Trouver trois nombres en progression géométrique connaissant leur somme 26 et la somme de leurs inverses $\frac{13}{18}$.

545. Démontrer que si trois quantités sont à la fois en progression arithmétique et en progression géométrique, elles sont égales.

546. Les nombres 12, 20 et 35 peuvent-ils faire partie d'une progression géométrique?

547. Connaissant le premier terme 4, le dernier 972 et la somme 1456 des termes d'une progression géométrique, trouver le nombre des termes et la raison.

548. Connaissant le premier terme 5, la raison 2 et la somme 315 des termes d'une progression géométrique, trouver le dernier terme et le nombre des termes.

549. Connaissant le premier terme 7, la raison 3, le dernier terme 567 d'une progression géométrique, trouver la somme des termes et le nombre des termes.

550. Une personne propose de donner à une autre personne 1 franc le 1er janvier, 2 francs le 2, 3 francs le 3, et ainsi de suite jusqu'à la fin du mois, à la condition que la seconde rende à la première $\frac{1}{1000}$ centime le 1er février, $\frac{2}{1000}$ centime le 2 février, $\frac{4}{1000}$ centime le 3 février, et ainsi de suite jusqu'au 28 février. Régler le compte des deux personnes à la fin de février.

551. On donne une progression géométrique

$$\div\!\div a : \quad aq : \quad aq^2 \ldots.$$

et une progression arithmétique

$$\div b. \quad b+r. \quad b+br \ldots.$$

Trouver les conditions pour que :

1° Le produit de deux termes quelconques de la première fasse partie de cette progression;

2° La somme de deux termes quelconques de la seconde fasse partie de cette seconde progression;

3° La somme de deux termes quelconques de la seconde progression corresponde au produit des termes de même rang pris dans la première.

552. On donne un cercle O qu'on divise en huit parties égales; on mène les rayons OA, OB, OC... qui vont aux points de division. De A on abaisse la perpendiculaire AP sur OB; de P on abaisse la perpendiculaire PQ sur OC et ainsi de suite. Calculer la longueur de la ligne brisée ainsi obtenue après avoir fait un tour complet.

LOGARITHMES.

553. Résoudre l'équation :

$$\log(20x+12)+\log(32x-8)=\log 15.$$

554. Trouver la valeur de x fournie par l'équation :

$$\log\sqrt{7x+3}+\log\sqrt{3x+5}=1+\log 4{,}5.$$

555. Résoudre :

$$\log(7x-9)^2+\log(3x-4)^2=2.$$

556. Résoudre sans le secours des tables :

$$4\log\frac{x}{2}+3\log\frac{x}{3}=5\log x-\log 27.$$

557. Pour quelles valeurs de n l'équation

$$x^2-\sqrt{2}\,x+\log n=0$$

a-t-elle des racines ?

558. Trouver un nombre entier x, tel que le double de son logarithme vulgaire surpasse d'une unité le logarithme du nombre $x+\frac{11}{10}$.

559. Calculer par logarithmes la valeur de x donnée par

$$x=\sqrt[3]{(29{,}85)^2}\times\sqrt{(17{,}53)^3}$$

560. Calculer

$$x=317{,}20\sqrt[5]{\frac{(23{,}41)^3}{2\sqrt{3}}}$$

561. Calculer

$$x=\sqrt[5]{\frac{3729\times(1{,}032)^{10}\times(0{,}6485)^3}{0{,}0021\times\sqrt[4]{7863}}}$$

562. Calculer

$$x = \sqrt[7]{\frac{6874^3 \times \sqrt[5]{0,01}}{\frac{5}{7} \times 725^6 \times \sqrt{0,678}}}$$

563. Calculer

$$x = \frac{25\sqrt{47^3} \times \sqrt[5]{0,000253}}{\sqrt[6]{0,037}}$$

564. Calculer par logarithmes le côté du carré équivalent à la couronne comprise entre deux cercles concentriques donnés par leurs rayons

$$R = 1^{m},345; \quad r = 0^{m},3458.$$

565. Quelle serait la raison d'une progression géométrique commençant par 10, le dernier terme étant 100 et ayant en tout 10 termes?

566. Trouver la raison d'une progression géométrique ayant pour termes extrêmes 1 et 65 536, et comprenant 17 termes en tout

567. On a un tonneau renfermant 228 litres de vin; chaque jour on retire du tonneau un litre, qu'on remplace par un litre d'eau. Au bout de combien de jours le tonneau renfermera-t-il des quantités égales d'eau et de vin?

INTÉRÊTS COMPOSÉS

568. Un père place 500 francs par an à 4 o/o et à intérêts composés, pour constituer une dot à sa fille, âgée de 8 ans. Quel sera le montant de cette dot, sachant qu'elle doit être réalisée quand la jeune fille aura 20 ans?

569. Une personne place 600 francs au commencement de chaque année à 5 o/o et à intérêts composés; au bout de combien de temps possèdera-t-elle 20 000 francs?

570. Une personne place tous les ans, pendant 25 ans, 300 francs à intérêts composés à 3 o/o. Un an après le dernier placement, elle a retiré 600 francs et a continué à retirer tous les ans 600 francs pendant 10 ans. Calculer ce qui lui reste.

571. Un industriel a emprunté, le 1er janvier 1899, une somme de 33 640 francs dont il s'est acquitté en deux paiements égaux chacun à 19 948fr,10. Le premier de ces paiements a été effectué le 1er janvier 1901 et le second le 1er janvier 1903. On demande à quel taux exact l'emprunt a été fait, sachant que, pour ces sommes, on a tenu compte des intérêts composés.

572. Une somme de 400 000 francs a été placée à intérêts composés; si on l'eût laissée un an de moins, on aurait touché une somme inférieure de 22 050 francs à celle qu'on a touchée; on aurait touché 23 152fr,50 de plus qu'on n'a touché si on avait laissé la somme placée pendant un an de plus. Trouver le taux et la durée du placement.

573. Deux capitaux, dont l'un est de 393 francs plus grand que l'autre, sont placés, le plus petit à 5,25 o/o, le plus grand à 3,25 o/o. Quels sont ces capitaux, sachant qu'au bout de 40 ans le plus petit est devenu le double de l'autre.

Spécimen d'une page de la table de logarithmes à cinq décimales.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	81 291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
1	358	365	371	378	385	391	398	405	411	418
2	425	431	438	445	451	458	465	471	478	485
3	491	498	505	511	518	525	531	538	544	551
4	558	564	571	578	584	591	598	604	611	617
5	624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
6	690	697	704	710	717	723	730	737	743	750
7	757	763	770	776	783	790	796	803	809	816
8	823	829	836	842	849	856	862	869	875	882
9	889	895	902	908	915	921	928	935	941	948
660	954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014
1	82 020	027	033	040	046	053	060	066	073	079
2	086	092	099	105	112	119	125	132	138	145
3	151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
4	217	223	230	236	243	249	256	263	269	276
5	282	289	295	302	308	315	321	328	334	341
6	347	354	360	367	373	380	387	393	400	406
7	413	419	426	432	439	445	452	458	465	471
8	478	484	491	497	504	510	517	523	530	536
9	543	549	556	562	569	575	582	588	595	601
670	607	614	620	627	633	640	646	653	659	666
1	672	679	685	692	698	705	711	718	724	730
2	737	743	750	756	763	769	776	782	789	795
3	802	808	814	821	827	834	840	847	853	860
4	866	872	879	835	892	898	905	911	918	924
5	930	937	943	950	956	963	969	975	982	988
6	995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052
7	83 059	065	072	078	085	091	097	104	110	117
8	123	129	136	142	149	155	161	168	174	181
9	187	193	200	206	213	219	225	232	238	245
680	251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
1	315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
2	378	385	391	398	404	410	417	423	429	436
3	442	448	455	461	467	474	480	487	493	499
4	506	512	518	525	531	537	544	550	556	563
5	569	575	582	588	594	601	607	613	620	626
6	632	639	645	651	658	664	670	677	683	689
7	696	702	708	715	721	727	734	740	746	753
8	759	765	771	778	784	790	797	803	809	816
9	822	828	835	841	847	853	860	866	872	879

	7
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

	6
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315
12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346
13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377
14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510
18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1609	1611	1614	1618
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656
22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694
23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774
25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286
36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506
40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685
43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748
44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812
45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155

L	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459
54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457
65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560
66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667
67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000
70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117
71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236
72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358
73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741
76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875
77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012
78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152
79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442
81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592
82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902
84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568
88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS

CHAPITRE II

APPPLICATIONS DES NOMBRES ALGÉBRIQUES

CHAPITRE III

PRINCIPES DU CALCUL ALGÉBRIQUE

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ

CHAPITRE V

PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ, FONCTION LINÉAIRE

CHAPITRE VI

ÉQUATIONS ET PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

CHAPITRE VII

VARIATIONS DE FONCTIONS

CHAPITRE VIII

DÉRIVÉES, APPLICATIONS

CHAPITRE IX

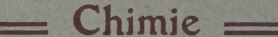
PROGRESSIONS, LOGARITHMES, INTÉRÊTS

Paris. — Imp. Lahure, rue de Fleurus, 9.

59615. — PARIS, IMPRIMERIE LAHURE
9, rue de Fleurus, 9

LIBRAIRIE HACHETTE & Cie, PARIS

SCIENCES NATURELLES

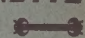


Chimie

LES OUVRAGES CI-DESSOUS ONT ÉTÉ RÉDIGÉS, REVUS OU REFONDUS CONFORMÉMENT AUX DERNIERS PROGRAMMES OFFICIELS

COURS DE GÉOLOGIE, PAR A. SEIGNETTE

PROFESSEUR DE SCIENCES NAT. AU LYCÉE CONDORCET
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ. — DOCTEUR ÈS SCIENCES



GÉOLOGIE (cl. de 4e A et de 5e B de l'Enseignement secondaire), 1 vol. in-16, avec 78 gravures, cart. toile........................ 1 fr. 50

CONFÉRENCES DE GÉOLOGIE (cl. de 2e A, B, C, D de l'Enseig. second, 1 vol. in-16 avec 130 grav., une carte en coul. cart. toile .... 1 fr. 50

LEÇONS DE PALÉONTOLOGIE ANIMALE (cl. de Philos. et mathém. de l'Enseig. second.) 1 vol. in-16, avec 70 grav., cart. toile........... 1 fr. »

COURS ÉLÉMENTAIRE DE GÉOLOGIE (Écoles normales primaires. Écoles prim. supér. et Enseig. second. des Jeunes Filles . Nouv. éd. avec 200 grav. 1 vol. in-16, cart. toile.. .... 2 fr. 50

AD. WURTZ

MEMBRE DE L'INSTITUT

AVEC LA COLLABORATION D'UNE SOCIÉTÉ DE CHIMISTES ET DE PROFESSEURS

DICTIONNAIRE DE CHIMIE PURE ET APPLIQUÉE, chimie organique et inorganique, chimie appliquée à l'industrie, à l'agriculture et aux arts, chimie analytique, chimie physique et minéralogie. 5 vol. grand in-8, avec un grand nombre de figures, brochés............. 90 fr. »
La demi-reliure en veau, plats papier, se paye en sus 3 fr. 50 par vol.

SUPPLÉMENT AU DICTIONNAIRE DE CHIMIE PURE ET APPLIQUÉE, publié par les mêmes, 2 vol. gr. in-8, avec un grand nombre de figures, brochés.......... 38 fr. 50

L'Ouvrage complet avec son supplément, 7 vol., br.. 125 fr. »
7 vol., rel......... 150 fr. »

La demi-reliure en veau, plats papier, se paye en sus 3 fr. 50 par vol.

DEUXIÈME SUPPLÉMENT AU DICTIONNAIRE DE CHIMIE PURE ET APPLIQUÉE de AD. WURTZ, publié sous la direction de Ch. FRIEDEL et C. CHABRIÉ. En cours de publication par fascicules grand in-8 à 2 fr.

En vente 70 fascicules.

Tome Ier (A-B)	1 vol. br.	20 fr.
Tome II (C)	1 vol. br.	20 fr.
Tome III (D-E)	1 vol. br.	20 fr.
Tome IV (F.-G)	1 vol. br.	24 fr.
Tome V (H)	1 vol. br.	16 fr.
Tome VI (IP)	1 vol. br.	26 fr.

3-1908-25000